

**Американска Фондация за България
Съюз на Математиците в България
Министерство на Образованието, Младежта и Науката
Есенен Математически Турнир
София, 9-11 ноември 2007 г..**

Тема за 11. клас

Задача 11.1. Дадени са различни остри ъгли α и β , за които

$$(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)(1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) = 2.$$

Да се докаже, че $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Задача 11.2. Да се намерят всички стойности на параметъра a , за които неравенството

$$\sqrt{x - x^2 - a} + \sqrt{6a - 2x - x^2} \leq \sqrt{10a - 2x - 4x^2}$$

има единствено решение.

Задача 11.3. В триъгълник ABC е прекарана ъглополовящата CC_1 . Точките $P \in C_1B$, $Q \in BC$, $R \in AC$ и $S \in AC_1$ са такива, че $C_1P = PQ = QC$ и $CR = RS = SC_1$. Да се докаже, че CC_1 е ъглополовящата на $\sphericalangle SCP$.

Задача 11.4. В една държава има 1000 града $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$, като някои от тях са свързани с авиолинии. Известно е, че i -ият град е свързан с d_i други града, като при това $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{1000}$ и $d_j \geq j + 1$ за всяко $j = 1, 2, \dots, 999 - d_{999}$. Да се докаже, че ако летището на който и да е град A_k бъде затворено, то ще е възможно да долетим от произволен град A_i до произволен друг град A_j , $i, j \neq k$ (възможно с прекачвания).