

Американска Фондация за България
Съюз на Математиците в България
Министерство на Образованието, Младешта и Науката
Есенен Математически Турнир
София, 9-11 ноември 2007 г..

Тема за 11. клас

Задача 11.1. Дадени са различни остри ъгли α и β , за които

$$(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)(1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) = 2.$$

Да се докаже, че $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Решение. След заместване $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ и $\cos^2 \beta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$ и преобразования даденото неравенство се записва във вида

$$(\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - 1)(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)^2 = 0.$$

Понеже α и β са различни остри ъгли, то $\operatorname{tg} \alpha \neq \operatorname{tg} \beta$, откъдето $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1$, т.е. $\sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta$. Оттук $\cos(\alpha + \beta) = 0$ и тъй като α и β са остри ъгли, получаваме $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Задача 11.2. Да се намерят всички стойности на параметъра a , за които неравенството

$$\sqrt{x - x^2 - a} + \sqrt{6a - 2x - x^2} \leq \sqrt{10a - 2x - 4x^2}$$

има единствено решение.

Решение. Да положим $u = x - x^2 - a$ и $v = 6a - 2x - x^2$. Тогава е изпълнено равенството $10a - 2x - 4x^2 = 2(u + v)$. Даденото неравенство може да се запише във вида $\sqrt{u} + \sqrt{v} \leq \sqrt{2(u + v)}$. То е еквивалентно на $2\sqrt{u}\sqrt{v} \leq u + v$,

което е изпълнено за всички стойности от дефиниционната област $\begin{cases} u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases}$.

Следователно неравенството има само едно решение точно когато системата $\begin{cases} x^2 - x + a \leq 0 \\ x^2 + 2x - 6a \leq 0 \end{cases}$ има единствено решение. Това е възможно в следните случаи:

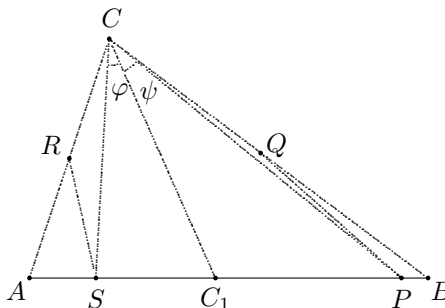
Случай 1. Едно от неравенствата има единствено решение, което е решение на другото неравенство. Следователно или $D_1 = 1 - 4a = 0$, откъдето $a = \frac{1}{4}$, което е решение, или $D_2 = 1 + 6a = 0$, откъдето $a = -\frac{1}{6}$, което не е решение.

Случай 2. Уравненията $x^2 - x + a = 0$ и $x^2 + 2x - 6a = 0$ имат общ реален корен. След умножаване на първото уравнение с 6 и събиране с второто получаваме $7x^2 - 4x = 0$, т.е. $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{4}{7}$. При $x_1 = 0$ получаваме $a = 0$, а при $x_2 = \frac{4}{7}$ намираме $a = \frac{12}{49}$. Директна проверка показва, че $a = 0$ е решение и $a = \frac{12}{49}$ не е.

Окончателно търсените стойности са $a = 0$ и $a = \frac{1}{4}$.

Задача 11.3. В триъгълник ABC е прекарана ъглополовящата CC_1 . Точките $P \in C_1B$, $Q \in BC$, $R \in AC$ и $S \in AC_1$ са такива, че $C_1P = PQ = QC$ и $CR = RS = SC_1$. Да се докаже, че CC_1 е ъглополовящата на $\angle SCP$.

Решение. Да означим $\angle SCC_1 = \varphi$, $\angle PCC_1 = \psi$ и $\angle PC_1C = \delta$. От $\triangle PQC$ имаме $\cos\left(\frac{\gamma}{2} - \psi\right) = \frac{CP}{2CQ}$, а от синусовата теорема за $\triangle PC_1C$ получаваме $\frac{CP}{PC_1} = \frac{\sin \delta}{\sin \psi}$. Тъй като $CQ = QP = PC_1$, от горните равенства намираме $\cos\left(\frac{\gamma}{2} - \psi\right) \sin \psi = \frac{\sin \delta}{2}$. Аналогично от $\triangle SCR$ и $\triangle SC_1C$ получаваме $\cos\left(\frac{\gamma}{2} - \varphi\right) \sin \varphi = \frac{\sin \delta}{2}$.



Следователно

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2} - \psi\right) \sin \psi = \cos\left(\frac{\gamma}{2} - \varphi\right) \sin \varphi,$$

откъдето $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \sin\left(2\psi - \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \sin\left(2\varphi - \frac{\gamma}{2}\right)$, т.е. $2\psi + 2\varphi - \gamma = 180^\circ$ или $\varphi = \psi$. Тъй като $\gamma > \varphi + \psi$, то $2\varphi + 2\psi - \gamma < \gamma < 180^\circ$, т.е. първото равенство е невъзможно. Остава $\varphi = \psi$, което означава, че CC_1 е ъглополовяща на $\angle SCP$.

Задача 11.4. В една държава има 1000 града $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$, като някои от тях са свързани с авиолинии. Известно е, че i -ият град е свързан с d_i други града, като при това $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{1000}$ и $d_j \geq j + 1$ за всяко $j = 1, 2, \dots, 999 - d_{999}$. Да се докаже, че ако летището на който и да е град A_k бъде затворено, то ще е възможно да долетим от произволен град A_i до произволен друг град A_j , $i, j \neq k$ (възможно с прекачвания).

Решение. Нека е затворено летището в k -ия град за някое $1 \leq k \leq 1000$. Означаваме останалите градове с $B_1, \dots, B_{999}$ като можем да считаме, че $B_i = A_i$ за $i = 1, \dots, k - 1$ и $B_i = A_{i+1}$ за $i = k + 1, \dots, 1000$. Да означим броя на авиолиниите излизащи от B_i с d'_i . Очевидно $d'_i \geq d_i - 1$ за всяко $i = 1, \dots, 999$. Без ограничение на общността можем да приемем, че $d'_1 \leq d'_2 \leq \dots \leq d'_{999}$.

Нека X е множеството от градовете достижими от B_{999} (след закриване на летището в град A_k). Очевидно $x = |X| \geq d'_{999} + 1 \geq d_{999}$. Да допуснем, че има градове, недостижими от B_{999} (в противен случай няма какво да се доказва). Нека означим множеството на тези градове с Y и нека B_u е градът с най-голям номер в Y . Тъй като $999 - x \leq 999 - d_{999}$ имаме

$$d'_u \geq d'_{999-x} \geq d_{999-x} - 1 \geq (999 - x + 1) - 1 = 999 - x,$$

т.е. $|Y| \geq 1000 - x$. Оттук получаваме

$$|X \cap Y| = |X| \cup |Y| - |X \cup Y| \geq x + (1000 - x) - 999 \geq 1,$$

противоречие.