

## Кратки решения на задачите

**Задача 8.1.** Да се реши уравнението  $|x - m| + |x + m| = x$  в зависимост от стойностите на параметъра  $m$ .

**Решение.** Нека  $x$  е едно решение на уравнението. Тогава от неравенството за модулите ще получим  $x = |x - m| + |x + m| \geq |(x - m) + (x + m)| = 2|x|$ , което е възможно само при  $x = 0$ . Но при  $x = 0$  ще имаме  $m = 0$ . Окончателно уравнението има решение  $x = 0$  при  $m = 0$  и няма решение при  $m \neq 0$ .

**Задача 8.2.** Даден е  $\triangle ABC$ , за който  $\sphericalangle A = 20^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 40^\circ$ . Построени са ъглополовящата  $AL$  ( $L \in BC$ ) и външната ъглополовяща  $CN$  ( $N \in AB^+$ ). Да се намери мярката на ъгъл  $CLN$ .

**Решение.** Нека  $AL$  и  $CN$  се пресичат в точка  $E$ . Нека точката  $D \in AB^+$  е такава, че  $AD = AC$ . Имаме  $\triangle ACL \cong \triangle ADL$  и  $\triangle ACE \cong \triangle ADE$  по I признак. Оттук  $\triangle ECL \cong \triangle EDL$ . Имаме  $\sphericalangle ADL = \sphericalangle ACL = 40^\circ$ ,  $\sphericalangle EDL = \sphericalangle ECL = 70^\circ$ , откъдето  $\sphericalangle NDE = \sphericalangle EDL = 70^\circ$ . Също така  $\sphericalangle AED = \sphericalangle AEC = 60^\circ$  и следователно  $\sphericalangle DEN = 60^\circ$ . Сега  $\triangle LED \cong \triangle NED$  по II признак и значи  $LE = NE$  и  $LD = ND$ . Така  $DE$  е симетрала на отсечката  $LN$ . Сега  $\sphericalangle LNE = 30^\circ$  и значи  $\sphericalangle NLC = 80^\circ$ .

**Задача 8.3.** Докажете, че съществува просто число  $p$ , сборът от цифрите на което е нечетно съставно число. Намерете най-малкото такова  $p$ .

**Решение.** Нека  $p = \overline{a_0 a_1 \dots a_n}$ . Известно е, че  $p \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n \pmod{9}$ , а тъй като  $p$  и сборът от цифрите му са нечетни числа, то  $p \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n \pmod{18}$ . Тъй като  $p$  е просто, то  $a_0 + a_1 + \dots + a_n \equiv 1, 5, 7, 11, 13$  или  $17 \pmod{18}$ . Най-малкото такова съставно число е 25. Ще потърсим трицифрено просто число със сбор от цифрите 25 (ако сборът е по-голям от 25, той е поне 35 и такива числа са поне четирицифрени). Единствените нечетни трицифрени числа със сбор от цифрите 25 са 799, 889, 979 и 997. Но  $799 = 17.47$ ,  $889 = 7.127$  и  $979 = 11.89$ , което показва, че тези числа не са прости. Числото 997 обаче е просто и това е търсеното най-малко просто число с желаното свойство.

**Задача 8.4.** Нека  $M$  е множество от 99 различни лъча с общо начало, които лежат в една равнина. Известно е, че два от тези лъчи образуват тъп ъгъл, във вътрешността на който няма лъчи от  $M$ . Какъв е възможно най-големият брой тъпи ъгли, чиито рамене са лъчи от  $M$ ?

**Решение.** 99 лъча образуват  $99 \cdot 98 / 2 = 99 \cdot 49$  ъгъла. Тези 99 от ъглите, вътре в които няма други лъчи, ще наричаме елементарни. Елементарните ъгли имат сбор  $360^\circ$ , така че сред тях има не повече от три тъпи. От условието следва, че има поне един тъп елементарен ъгъл.

Ако тъпите елементарни ъгли са три, те разделят лъчите на три множества, съдържащи съответно  $k, m, n$  лъча,  $k + m + n = 99$ . Всички ъгли, съставени от лъчи от едно множество, са задължително остри.

Ако тъпите елементарни ъгли са два, те разделят лъчите на две множества; поне едното от тях се съдържа в остър ъгъл (нека в него има  $k$  лъча), а другото се съдържа в ъгъл, по-малък от  $180^\circ$ . Разделяме второто по ъглополовящата на този ъгъл на две множества (съдържащи съответно  $m, n$  лъча),  $k + m + n = 99$ . Всички ъгли, съставени от лъчи от едно от трите получени множества, са задължително остри.

Ако тъпият елементарен ъгъл е единствен, то всички лъчи се съдържат в ъгъл, по-малък от  $270^\circ$ . Разделяме този ъгъл на три остри ъгъла. Нека в тях има съответно  $k, m, n$  лъча,  $k + m + n = 99$ . Всички ъгли, съставени от лъчи от едно от трите получени множества, са задължително остри.

Във всеки от трите случая общият брой остри ъгли е поне

$$\begin{aligned} \frac{k(k-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} &= \frac{k^2 + m^2 + n^2}{2} - \frac{k + m + n}{2} \\ &\geq \frac{(k + m + n)^2}{6} - \frac{99}{2} = \frac{99.33 - 99}{2} = 99.16. \end{aligned}$$

Неравенството в горните разсъждения следва от неравенството между средно аритметично и средно квадратично, или от Коши - Буняковски - Шварц, или от класическото  $k^2 + m^2 + n^2 \geq km + kn + mn$ . Останалите не повече от  $99.49 - 99.16 = 99.33 = 3267$  ъгли могат да са тъпи. Те могат да бъдат точно толкова: достатъчно е да има три елементарни тъпи ъгъла и  $k = m = n = 33$ .