

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 18-20 ноември 2017 г.

София, 2017 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Нека G е медицентър на $\triangle ABC$ и точка D е симетричната на G относно средата на страната AB . Нека правата през D , успоредна на AB , пресича правата BC в точка M , правата през D успоредна на BC , пресича правата AC в точка N и правата през D , успоредна на AC , пресича правата AB в точка P . Да се докаже, че точките M , N и P лежат на една права.

Решение. Построяваме $M_1 = AC \cap DM$ и $N_1 = BC \cap DP$. Тъй като G е среда на CD , то правата през G , успоредна на AB , съдържа средната отсечка в триъгълника M_1MC , а отсечката AB е средна за трапеца с основи гореспоменатата средна отсечка и M_1M . Понеже CD е медиана, следва че D е средата на M_1M , а значи и N_1 е средата на CM и N е средата на M_1C (средни отсечки в $\triangle M_1MC$). Следователно NN_1 е средна отсечка в $\triangle M_1MC$ и е успоредна и равна на половинката на основата MM_1 . Тогава $NN_1 = \frac{1}{2}MM_1 = DM$, DMN_1N е успоредник и диагоналите му MN и DN_1 се разполюват. Но точка P е среда на DN_1 , защото BP е средна отсечка в $\triangle DMN_1$. Следователно точките M , N и P лежат на една права.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за доказване, че D е среда на MM_1 (ако е използвано без доказателство – 1 т.), 2 т. за успоредника DMN_1N , 2 т. за довършване.

Задача 8.2. Нека $a > 0$ и $|b - c| > 4a$. Да се докаже, че е в сила поне едно от неравенствата $b^2 \geq 4ac$ или $c^2 \geq 4ab$.

Решение. Допускаме обратното, т.е. че едновременно са изпълнени неравенствата $b^2 < 4ac$ и $c^2 < 4ab$. Тогава $b^2 + c^2 < 4ac + 4bc$, което е еквивалентно на $(b - 2a)^2 + (c - 2a)^2 < 8a^2$. Оттук и от условието следва, че

$$16a^2 < |b - c|^2 = |(b - 2a) - (c - 2a)|^2 \leq 2((b - 2a)^2 + (c - 2a)^2) < 16a^2,$$

което е противоречие.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за допускане на обратното, 2 т. за получаване на неравенството $(b - 2a)^2 + (c - 2a)^2 < 8a^2$ или негов аналог, 2 т. за правилно и съществено за задачата използване на неравенството на триъгълника, 1 т. за заключението.

Задача 8.3. а) Съществуват ли естествени числа n , x и y , за които е изпълнено равенството $86^n = x^2 + y^2$?

б) Да се докаже, че за всяко естествено число n съществуват естествени числа x , y и z , такива, че $86^n = x^2 + y^2 + z^2$.

Решение. а) Отговор – не съществува такова n . Да допуснем, че n , x и y имат исканото свойство. Тъй като простото число $43 = 4 \cdot 10 + 3$ дели 86 , то дели и $x^2 + y^2$. Тогава $43|x$ и $43|y$, което веднага дава $43^2|x$ и $43^2|y$ и можем да съкратим на 43^2 . Тази процедура може да продължи докато лявата страна се дели на 43 (в частност n е четно).

Нека $n = 2n_1$ и $4^{n_1} = x_1^2 + y_1^2$, $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$. Оттук по модул 4 лесно следва, че $2|x_1$ и $2|y_1$ и можем, както и по-горе, да съкратим и да продължим. В крайна сметка достигахме до уравнението $1 = x_2^2 + y_2^2$, което няма решение в естествени числа, противоречие.

б) При $n = 1$ имаме $86^1 = 81 + 4 + 9 = 9^2 + 2^2 + 1^2$, а при $n = 2$ –

$$86^2 = 84^2 + 2.170 = 84^2 + 4.85 = 84^2 + 4(81 + 4) = 84^2 + 18^2 + 4^2.$$

Нека $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. n е нечетно число. Тогава

$$86^n = 86 \left(86^k \right)^2 = (9^2 + 2^2 + 1^2) \left(86^k \right)^2 = \left(9 \cdot 86^k \right)^2 + \left(2 \cdot 86^k \right)^2 + \left(86^k \right)^2$$

е сбор на 3 квадрата.

Нека $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. n е четно число. Тогава

$$86^n = 86^2 \left(86^{k-1} \right)^2 = (84^2 + 18^2 + 4^2) \left(86^{k-1} \right)^2$$

е сбор на 3 квадрата.

Оценяване. (7 точки) За (а) – 2 т. За (б): Намерени разлагания за $n = 1$ и $n = 2$ – по 1 т. При разгледан и решен поне един случай (четно или нечетно n) – 2 т. При решени и двата случая, още 1 т.

Задача 8.4. Разглеждаме таблици с 5 реда и 15 стълба, в които някои от клетките са черни. Преди всеки ред и над всеки стълб е записан броят на черните клетки в този ред или стълб. Оказало се, че записаните числа са: 10, 6, 7, 4, 6 за редовете отгоре-надолу, и 5, 3, 3, 0, 5, 1, 1, 1, 5, 0, 1, 1, 5, 1, 1 за стълбовете отляво надясно (един пример е показан по-долу).

Две таблици се считат различни, ако поне една клетка е бяла в едната, а черна в другата таблица. Да се намери броят на различните таблици от този вид.

	5	3	3	0	5	1	1	1	5	0	1	1	5	1	1
10															
6															
7															
4															
6															

Решение. Ще наричаме таблиците от разглеждания вид *томограми*.

Зададената томограма е с размери 5×15 . Шест от стълбовете обаче са еднозначно определени – съдържат или максимален (5) или минимален (0) брой черни квадратчета. Премахването им не се отразява на броя на различните решения, така че можем работим с опростена томограма, съдържаща $15 - 6 = 9$ стълба. Броят на черните квадратчета по редове се редуцира с 4, тъй като сме премахнали 4 максимални стълба. Модифицираната 5×9 томограма съдържа празен ред, който също може да бъде премахнат, така че началната задача е еквивалентна (след пренареждане на редове и стълбове) на намирането на всички решения на томограмата

	3	3	1	1	1	1	1	1	1
6									
3									
2									
2									

Лема. Нека е дадена $m \times n$ томограма, всички стълбове на която съдържат точно едно черно квадратче. Ако означим броят на черните квадратчета в i -тия ред с r_i , то $n = r_1 + r_2 + \dots + r_m$ и броят на различните решения е

$$\frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_m!}.$$

Доказателство. Първата част на твърдението е тривиална и следва директно от сравняването на броя на всички черни квадратчета, сумирани веднъж по редове и веднъж по стълбове. Можем да запълним първия ред по $\binom{n}{r_1}$ различни начина. При всеки от тях оставаме с $(m-1) \times (n-r_1)$ единична томограма за запълване. По индукция заключаваме, че броят на различните решения е

$$\binom{n}{r_1} \binom{n-r_1}{r_2} \binom{n-r_1-r_2}{r_3} \dots \binom{r_m}{r_m},$$

което след опростяване съответства на израза в лемата.

Ще решим задачата, прилагайки няколко пъти горната лема. Разглеждаме маркирания в червено 2×2 квадрат на опростената томограма. Във всеки от стълбовете си той съдържа поне едно черно квадратче, съгласно принципа на Дирихле. Следователно имаме 3 различни случая:

Първи случай. Червеният квадрат съдържа четири черни квадратчета. Тогава задачата се свежда до намиране броят различни решения на единичната 2×9 томограма

	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6									
3									

Съгласно лемата, той е $\frac{9!}{6!3!} = 84$.

Втори случай. Червеният квадрат съдържа три черни квадратчета. Възможни са 4 различни конфигурации, при които това е изпълнено, като разглеждането на всяка от тях е напълно аналогично. Без ограничение на общостта, нека само горното дясно квадратче на червения квадрат е бяло. Тогава вторият стълб на томограмата е напълно определен, както и четвъртият ред. Можем да ги премахнем и задачата се свежда до намиране на броя различни решения на 3×8 томограмата

	2	1	1	1	1	1	1	1
5								
2								
2								

които имат черно квадратче долу вляво, отговарящо на горното ляво черно квадратче в червения квадрат. Задачата е еквивалентна на намиране на броя различни решения на $(5, 2, 1)$ -единична томограма с бяло квадратче долу вляво. Последните можем лесно да преброим, като използваме два пъти лемата и от броя на всички решения извадим тези, с черно квадратче на уреченото място:

$$\frac{(5 + 2 + 1)!}{5!2!1!} - \frac{(5 + 2)!}{5!2!} = 7 \frac{7!}{5!2!} = 147.$$

Тъй като имаме 4 различни възможни конфигурации за червения квадрат, то общо от този случай получаваме $4 \cdot 147 = 588$ различни решения.

Трети случай. Червеният квадрат съдържа две черни квадратчета. Тъй като всеки от стълбовете му съдържа поне едно, то са възможни четири различни конфигурации – две с шахматно оцветяване и две с изцяло оцветен ред. При първите две първите два стълба са еднозначно определени и задачата се свежда до намиране броя различни решения за $(4, 1, 1, 1)$ -единична томограма, които съгласно лемата са:

$$\frac{7!}{4!1!1!1!} = 210.$$

При другите две аналогично достигаем до $(4, 2, 1)$ -единична томограма, водеща до

$$\frac{7!}{4!2!1!} = 105.$$

Общо от този случай получаваме $2 \cdot 210 + 2 \cdot 105 = 630$ различни решения.

Окончателно, зададената томограма има $84 + 588 + 630 = \mathbf{1302}$ различни решения.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за опростяване на задачата до 5×9 томограма, 2 т. за формулиране и доказване на лемата или аналогично помощно твърдение, по 1 т. за всеки правилно анализиран случай, 1 т. за сумиране на отговорите за получаване на крайния резултат.