

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

Задача 10.1. Да се намерят всички неотрицателни стойности на реалния параметър a , за които решенията на неравенството

$$(a - 4x^2)^2 - (2a + 1)x^2 + 6x^3 \leq 0$$

образуват краен затворен интервал.

Задача 10.2. Даден е $\triangle ABC$ и нека M е средата на страната AB . Ако означим с P и R центровете на външнописаните окръжности за $\triangle AMC$ към страните AM и CM съответно, а с Q и T центровете на външнописаните окръжности за $\triangle BMC$ към страните BM и CM съответно, то да се докаже, че точките P , Q , R и T лежат на една окръжност.

Задача 10.3. В окръжност Γ с радиус 1 е построена хорда, която отрязва дъга с дължина $\sqrt{2}\pi$. За кои естествени n , $3 \leq n \leq 2018$ в Γ можем да впишем правилен n -ъгълник, така че като номерираме последователно по часовниковата стрелка върховете му с числата от 1 до n , сумите на числата от двете страни на хордата да са равни?

Имаме право да избираме върха, от който започваме номерацията и не е позволено краищата на хордата да са измежду върховете на многоъгълника.

Задача 10.4. Една държава се нарича „подредена“, ако в нея има 10110900 града, като всеки град е свързан с директни пътища с точно три други града. Да се намери минималното естествено число k със следното свойство:

Във всяка подредена държава могат да се изберат k града така, че всеки затворен маршрут минава през поне един избран град.

Затворен маршрут е последователност от различни градове $A_1, A_2, \dots, A_k$, $k \geq 3$ за които A_i е свързан с път с A_{i+1} за $i = 1, 2, \dots, k-1$ и A_k е свързан с път с A_1 .