

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 9-11 ноември 2018 г.

София, 2018 г.

Задача 10.1. Да се намерят всички неотрицателни стойности на реалния параметър a , за които решенията на неравенството

$$(a - 4x^2)^2 - (2a + 1)x^2 + 6x^3 \leq 0$$

образуват краен затворен интервал.

Решение. Отговор: $a = 0$. Посредством директни преобразувания (или разглеждане на израза като биквадратно уравнение спрямо a) лявата страна на неравенството се преобразува до:

$$(8x^2 - x - a)(2x^2 + x - a) \leq 0.$$

Тъй като $a \geq 0$, то дискриминантите и на двата множителя са строго положителни, което означава, че лявата страна има четири реални корена: $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, измежду които най-много два могат да съвпадат (корените на всеки от квадратните тричлени са два по два различни, докато коефициентите пред x^2 в двата тричлена са с еднакъв знак, а тези пред x - с противоположен и значи двата тричлена не могат да имат еднакви корени). В общият случай, решението на неравенството в условието се записва посредством следната формула: $x \in [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4]$, което е непрекъснат затворен интервал тогава и само тогава, когато $x_2 \equiv x_3$. Кандидати за общ корен са:

$$8x^2 - x - a = 2x^2 + x - a \iff x(3x - 1) = 0 \iff x \in \left\{0, \frac{1}{3}\right\}.$$

За $x = 0$, получаваме $a = 0$ и директно пресмятаме останалите два корена на лявата страна, а именно: $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right\}$. В този случай, двойният корен наистина се намира между двата единични и този избор на a води до решение на задачата интервала $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right]$. За $x = 1/3$, получаваме $a = \frac{5}{9}$ и директно пресмятаме останалите два корена на лявата страна: $\left\{-\frac{5}{6}, -\frac{5}{24}\right\}$. Тук двойният корен не е между двата единични, което определя областта на решението на: $\left[-\frac{5}{6}, -\frac{5}{24}\right] \cup \{0\}$ - обединение на интервал и отделена точка. Тази област не отговаря на изискването в условието и този случай не води до решение. Окончателно, остана само $a = 0$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за разлагането на множители на лявата страна; 1 т. за наблюдението, че тя винаги има четири реални корена; 2т. за извода, че е необходим двоен корен; по 1 т. за разглеждането на всеки от двата случая за общ корен $x \in \{0, 1/3\}$.

Задача 10.2. Даден е $\triangle ABC$ и нека M е средата на страната AB . Ако означим с P и R центровете на външнописаните окръжности за $\triangle AMC$ към страните AM и CM съответно, а с Q и T центровете на външнописаните окръжности за $\triangle BMC$ към страните BM и CM съответно, то да се докаже, че точките P , Q , R и T лежат на една окръжност.

Решение. Нека I и J са центровете на вписаните в $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$ окръжности, а D е точка от лъча CM , такава че $MD = MA = MB$. Тъй като $APMI$ и $CRMI$ са вписани четириъгълници (в окръжности с диаметри PI и RI съответно) и освен това $\triangle AMP \cong \triangle DMP$ (по I-ви признак), то:

$$\sphericalangle MDP = \sphericalangle MAP = \sphericalangle MIP = \sphericalangle MRC.$$

Следователно $CPDR$ е вписан четириъгълник и аналогично $CQDT$ е вписан четириъгълник. Тогава

$$MP \cdot MR = MD \cdot MC = MQ \cdot MT,$$

т.е. точките P, Q, R и T лежат на една окръжност, с което доказателството е завършено.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за построяване на точките I и J и отчитане на факта, че четириъгълниците $APMI$ и $CRMI$ (или съответно $BQMJ$ и $CTMJ$) са вписани; 3 т. за построяване на точката D и отчитане на факта, че четириъгълниците $CPDR$ и $CQDT$ са вписани; 2 т. за довършване на решението.

Задача 10.3. В окръжност Γ с радиус 1 е построена хорда, която отрязва дъга с дължина $\sqrt{2}\pi$. За кои естествени n , $3 \leq n \leq 2018$ в Γ можем да впишем правилен n -ъгълник, така че като номерираме последователно по часовниковата стрелка върховете му с числата от 1 до n , сумите на числата от двете страни на хордата да са равни?

Имаме право да избираме върха, от който започваме номерацията и не е позволено краищата на хордата да са измежду върховете на многоъгълника.

Решение. В правилен n -ъгълник на всяка страна отговаря *елементарна* дъга с дължина $\frac{2\pi}{n}$. Да означим с k броят върхове на многоъгълника, принадлежащи на дъгата с дължина $\sqrt{2}\pi$. Тогава тази дъга съдържа изцяло $(k-1)$ елементарни дъги и (някакви) части от други 2 елементарни дъги, т.е.,

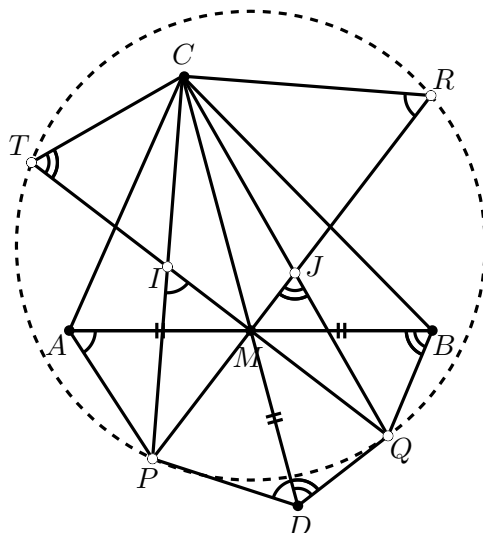
$$(k+1)\frac{2\pi}{n} > \sqrt{2}\pi \implies k > \frac{n}{\sqrt{2}} - 1.$$

От друга страна, тъй като

$$1 + 2 + \dots + \frac{n}{\sqrt{2}} = \frac{n(n + \sqrt{2})}{4} > \frac{n(n+1)}{4} = \frac{1 + 2 + \dots + n}{2},$$

сумите от двете страни на хордата могат да са равни единствено, ако $k < \frac{n}{\sqrt{2}}$. Следователно

$k = \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor$. Най-малката възможна сума на k на брой върха е когато тези върхове са първите



k номерирани и тогава тази сума е равна на $k(k+1)/2$. Следващата най-малка сума е, когато сме взели върховете от 2 до $k+1$ и тя е $\frac{k(k+1)}{2} + k$. Но, използвайки, че $\sqrt{2} > 7/5$, получаваме

$$\frac{k(k+1)}{2} + k = \frac{k(k+3)}{2} \geq \frac{\left(\frac{n}{\sqrt{2}} - 1\right) \left(\frac{n}{\sqrt{2}} + 2\right)}{2} = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{(\sqrt{2}-1)n-4}{4} > \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n-10}{10},$$

от където следва, че при $n \geq 10$ единствената възможност за равенство на сумите по дъгите е, когато най-малките k върха са от едната страна, а останалите $n - k$ върха - от другата страна на хордата. В този случай, задачата се свежда до

$$\frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

Умножавайки двете страни по 16 и прибавяйки единица, получаваме че $(x, y) = (2n+1, 2k+1)$ е решение на уравнението на Пел

$$x^2 - 2y^2 = -1.$$

Фундаменталното решение се получава, при $k = n = 0$ и е $(1, 1)$, а за всички останали решения (x_m, y_m) е изпълнено

$$x_m + \sqrt{2}y_m = (1 + \sqrt{2})^{2m-1}.$$

За $m = \{2, 3, 4, 5\}$, получаваме $n = \{3, 20, 119, 696\}$. Следващото генерирано $n = 4059$ надхвърля 2018. Ясно е, че при всеки от тези случаи може да се впише правилен n -ъгълник с исканите свойства, защото

$$\frac{\left(\frac{n}{\sqrt{2}} - 1\right) \left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)}{2} = \frac{n(n - \sqrt{2})}{4} < \frac{n(n+1)}{4} = \frac{k(k+1)}{2}$$

и значи удовлетворяваме изискването $k > \frac{n}{\sqrt{2}} - 1$.

Остава да проверим всеки от случаите $n = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Ясно е, че ако n е от вида $n = 4\ell + 1$ или $n = 4\ell + 2$, то сумата на всички върхове на n -ъгълника $n(n+1)/2$ не е четно число и няма как да я разделим на две равни части, което автоматично изключва $n = \{5, 6, 9\}$. При $n = 4$, $k = \left\lceil \frac{4}{\sqrt{2}} \right\rceil = 2$ и тъй като $2 + 3 = 1 + 4$, то $n = 4$ е решение. При $n = 7$ имаме $k = \left\lceil \frac{7}{\sqrt{2}} \right\rceil = 4$. Директно се проверява, че $2 + 3 + 4 + 5 = 14 = 6 + 7 + 1$ и значи $n = 7$ е решение. Аналогично, при $n = 8$ имаме $k = 5$, но сумата на всеки 5 последователни числа се дели на 5 и няма как да бъде $\frac{n(n+1)}{4} = 18$. Следователно $n = 8$ не е решение.

Окончателно получихме, че всички решения на задачата са: $n \in \{3, 4, 7, 20, 119, 696\}$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за изразяването $k = \left\lceil \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rceil$. 1т. за фиксирането на първите k върха при $n \geq 10$. 1 т. за свеждането до уравнение на Пел. 3 т. за намирането на общата

формула за решенията и генерирането на тези $n \leq 2018$. 1 т. за разглеждането на случаите $4 \leq n \leq 9$.

Задача 10.4. Една държава се нарича „подредена“, ако в нея има 10110900 града, като всеки град е свързан с директни пътища с точно три други града. Да се намери минималното естествено число k със следното свойство:

Във всяка подредена държава могат да се изберат k града така, че всеки затворен маршрут минава през поне един избран град.

Затворен маршрут е последователност от различни градове $A_1, A_2, \dots, A_k$, $k \geq 3$ за които A_i е свързан с път с A_{i+1} за $i = 1, 2, \dots, k-1$ и A_k е свързан с път с A_1 .

Решение. Отговор: $k = 5055450$. Нека $N = 10110900$ и да разгледаме граф G с върхове дадените градове и ребра – пътищата между тях. Всеки връх на G е от степен 3. Трябва да намерим минималното k , за което винаги можем да оцветим k върха на G така че всеки цикъл да съдържа оцветен връх.

Да оцветим всички върхове на графа в червено. Ще оцветяваме някои върхове в синьо по следното правило: Ако при оцветяването на даден връх в синьо не възниква изцяло син цикъл, го правим. Продължаваме по този начин докато не може да оцветим нов връх в синьо. Нека в този момент имаме x червени и $N - x$ сини върха. От всеки червен връх A поставяме две стрелки към двата сини върха от цикъла, които се получава при оцветяване на A в синьо.

Лесно се вижда, че във всеки син връх влизат най-много две стрелки. Следователно $2x \leq 2(N - x)$, т.е. $x \leq \frac{N}{2}$.

Тъй като N се дели на 4, да разгледаме граф съставен от $\frac{N}{4}$ пълни четириъгълници (четири върха, всеки два от които са свързани с ребро). Лесно се вижда, че във всеки такъв четириъгълник трябва да оцветим поне два върха. Следователно са необходими поне $\frac{N}{2} = 5055450$ оцветени върха.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за предположение, че отговорът е $\frac{N}{2}$; 5 т. за доказване, че можем да оцветим $\leq \frac{N}{2}$ върха; 1 т. за пример, че трябва да са оцветени поне $\frac{N}{2}$ върха.