

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

Задача 11.1. Дадени са редиците $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ за които $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $b_1 = 7$, $b_2 = 13$ и

$$a_{n+1} = a_n a_{n-1}, b_{n+1} = 2b_n a_{n-1} - b_{n-1} a_n$$

при $n \geq 2$. Да се намерят всички n за които a_n дели b_n .

Задача 11.2. Точки M и N са среди съответно на страните BC и AC на $\triangle ABC$. Точка P е от описаната около $\triangle CMN$ окръжност k , като P и C лежат в различни полуравнини относно правата AB . Отсечката PA пресича k в точка M_1 , а отсечката PB пресича k в точка N_1 . Ако отсечките MM_1 и NN_1 се пресичат в точка X , да се докаже, че $\sphericalangle ACX = \sphericalangle BCP$.

Задача 11.3. Да се намерят всички прости числа $p < 2018$ за които съществува множество от естествени числа $M = \{a, b, a + 1, b - 1\}$ за което:

1. $p \in M$
2. Числата a и b имат едни и същи прости делители;
3. Числата $a + 1$ и $b - 1$ имат едни и същи прости делители.

Задача 11.4. Една държава се нарича „подредена“, ако в нея има 10112018 града, като всеки град е свързан с директни пътища с точно три други града. Да се намери минималното естествено число k със следното свойство:

Във всяка подредена държава могат да се изберат k града така, че всеки затворен маршрут минава през поне един избран град.

Затворен маршрут е последователност от различни градове $A_1, A_2, \dots, A_k$, $k \geq 3$ за които A_i е свързан с път с A_{i+1} за $i = 1, 2, \dots, k - 1$ и A_k е свързан с път с A_1 .