

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 9-11 ноември 2018 г.

София, 2018 г.

Задача 11.1. Дадени са редиците $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ за които $a_1 = 3, a_2 = 5, b_1 = 7, b_2 = 13$ и

$$a_{n+1} = a_n a_{n-1}, b_{n+1} = 2b_n a_{n-1} - b_{n-1} a_n$$

при $n \geq 2$. Да се намерят всички n за които a_n дели b_n .

Решение. Разделяме почленно второто равенство на $a_{n+1} = a_n a_{n-1}$ и получаваме:

$$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{2b_n a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} - \frac{b_{n-1} a_n}{a_n a_{n-1}} = \frac{2b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}.$$

За редицата $c_n = \frac{b_n}{a_n}$ имаме:

$$c_1 = \frac{7}{3}, c_2 = \frac{13}{5} \text{ и } c_{n+1} - c_{n-1} = 2c_n.$$

Това означава, че $c_1, c_2, \dots$, е аритметична прогресия с първи член $c_1 = \frac{7}{3}$ и разлика $d = c_2 - c_1 = \frac{13}{5} - \frac{7}{3} = \frac{4}{15}$. Общият член на редицата е:

$$c_n = \frac{7}{3} + (n-1)\frac{4}{15} = \frac{4n+31}{15}.$$

Търсим всички n за които a_n дели b_n , т.е. c_n е цяло число. Тогава 15 дели $4n+31$, т.е. 15 дели $4n+1$, което е изпълнено при $n = 15t + 11$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за разглеждане на редицата c_n ; 2 т. за доказване, че редицата c_n е аритметична прогресия; 1 т. за намиране на общия член на редицата c_n ; 2 т. за получаване на отговора.

Задача 11.2. Точки M и N са среди съответно на страните BC и AC на $\triangle ABC$. Точка P е от описаната около $\triangle CMN$ окръжност k , като P и C лежат в различни полуравнини относно правата AB . Отсечката PA пресича k в точка M_1 , а отсечката PB пресича k в точка N_1 . Ако отсечките MM_1 и NN_1 се пресичат в точка X , да се докаже, че $\sphericalangle ACX = \sphericalangle BCP$.

Решение. Нека $NN_1 \cap AB = X_1$. От $\sphericalangle N_1 X_1 B = \sphericalangle N_1 C M$ следва, че $N_1 X_1 C B$ е вписан четириъгълник. Оттук получаваме $\sphericalangle B N_1 C = \sphericalangle B X_1 C$ откъдето $\sphericalangle A M_1 C = \sphericalangle A X_1 C$, т.е. $A M_1 X_1 C$ е вписан четириъгълник. Следователно

$$\sphericalangle X_1 M_1 C = \sphericalangle X_1 A C = \sphericalangle M N C = \sphericalangle M M_1 C,$$

т.е. M_1, X_1 и M лежат на една права и значи $X \equiv X_1$.

Нека BP пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка K . Сега имаме $\sphericalangle A C K = \sphericalangle A B K = \sphericalangle X C N_1$ (тъй като $N_1 X C B$ е вписан) и $\sphericalangle K C P = \sphericalangle B C N_1$ (от успоредността $FT \parallel KB$). От последните две равенства следва, че $\sphericalangle A C P = \sphericalangle X C B$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за $X \equiv X_1$; 2 т. за $\sphericalangle A C K = \sphericalangle A B K = \sphericalangle X C N_1$; 2 т. за $\sphericalangle K C P = \sphericalangle B C N_1$.

Задача 11.3. Да се намерят всички прости числа $p < 2018$ за които съществува множество от естествени числа $M = \{a, b, a+1, b-1\}$ за което:

1. $p \in M$
2. Числата a и b имат едни и същи прости делители;
3. Числата $a+1$ и $b-1$ имат едни и същи прости делители.

Решение. Отговор: 3, 5, 17 и 257. Ако $a = p$ имаме $b = p^n$ и числата $p+1$ и p^n-1 имат едни и същи прости делители. Нека q е прост делител на $p-1$. Тъй като $p-1$ дели p^n-1 за всяко n , то q дели и p^n-1 . Понеже $p+1$ и p^n-1 имат едни и същи прости делители,

то q дели и $p + 1$. Следователно q дели $(p + 1) - (p - 1) = 2$, т.е. $q = 2$. Следователно $p - 1$ няма нечетни делители, т.е. $p - 1 = 2^t$ или $p = 2^t + 1$.

Ако $b = p$ имаме $a = p^n$ и числата $p^n + 1$ и $p - 1$ имат едни и същи прости делители. Нека q е прост делител на $p - 1$ и $p^n + 1$. Тъй като $p - 1$ дели $p^n - 1$ за всяко n , то q дели и $p^n - 1$. Следователно q дели $(p^n + 1) - (p^n - 1) = 2$, т.е. $q = 2$. Следователно $p - 1$ няма нечетни делители, т.е. $p - 1 = 2^t$ или $p = 2^t + 1$.

Случаите когато $a + 1 = p$ или $b - 1 = p$ са аналогични на разгледаните.

Получихме, че ако съществува просто число p с исканите свойства, то $p = 2^t + 1$. Числата $a = 2^t + 1$, $b = (2^t + 1)^2$ удовлетворяват условието, защото $a + 1 = 2^t + 2$ и $b - 1 = 2^t(2^t + 2)$ имат едни и същи прости делители.

Простите числа $p = 2^t + 1 < 2018$ са: 2, 3, 5, 17 и 257.

При $p = 2$ числата са 2, 4, 3, 3 и тъй като има повторение, те не образуват множество.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за наблюдението, че трябва да се разгледат само два случая; по 2 т. за разглеждане на всеки от случаите и доказване, че $p = 2^t + 1$; 2 т. за пример, че има такива числа при $p = 2^t + 1$.

Задача 11.4. Една държава се нарича „подредена“, ако в нея има 10112018 града, като всеки град е свързан с директни пътища с точно три други града. Да се намери минималното естествено число k със следното свойство:

Във всяка подредена държава могат да се изберат k града така, че всеки затворен маршрут минава през поне един избран град.

Затворен маршрут е последователност от различни градове $A_1, A_2, \dots, A_k$, $k \geq 3$ за които A_i е свързан с път с A_{i+1} за $i = 1, 2, \dots, k - 1$ и A_k е свързан с път с A_1 .

Решение. Нека $N = 10112018$ и да разгледаме граф G с върхове дадените градове и ребра – пътищата между тях. Всеки връх на G е от степен 3. Трябва да намерим минималното k , за което винаги можем да оцветим k върха на G така че всеки цикъл да съдържа оцветен връх.

Да оцветим всички върхове на графа в червено. Ще преоцветяваме някои върхове в синьо по следното правило: Ако при оцветяването на даден връх в синьо не възниква изцяло син цикъл, го правим. Продължаваме по този начин докато не може да оцветим нов връх в синьо. Нека в този момент имаме x червени и $N - x$ сини върха. От всеки червен връх A поставяме две стрелки към двата сини върха от цикъла, които се получава при оцветяване на A в синьо.

Лесно се вижда, че във всеки син връх влизат най-много две стрелки. Следователно $2x \leq 2(N - x)$, т.е. $x \leq \frac{N}{2}$.

Ако имаме равенство всеки син връх е край на точно две стрелки и сините върхове са точно $\frac{N}{2}$. Но това е възможно само ако всеки син връх е свързан с точно един син, т.е. сините върхове се разбиват на двойки, т.е. $\frac{N}{2}$ е четно.

Следователно $k \leq \frac{N}{2} - 1$ Да разгледаме граф съставен от $\frac{N - 6}{4}$ пълни четириъгълни-

ци (четири върха, всеки два от които са свързани с ребро) и една пресечена триъгълна пирамида. Лесно се вижда, че във всеки такъв четириъгълник и в пресечената пирамида трябва да оцветим поне два върха. Следователно са необходими поне $k = \frac{N}{2} - 1 = 5056008$ оцветени върха.

Оценяване. (7 точки) 4 т. за доказване, че можем да оцветим $\leq \frac{N}{2}$ върха; 1 т. за доказване, че равенство може да има само при $\frac{N}{2}$ е четно; 2 т. за пример, че трябва да са оцветени поне $\frac{N}{2} - 1$ върха.