

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

Задача 12.1. Да се докаже, че за всяка квадратна функция $f(x) = x^2 + px + q$ е изпълнено:

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x)| \geq \frac{1}{8}.$$

Кога се достига равенство?

Задача 12.2. С диаметър страната AB на равностранен $\triangle ABC$ е построена окръжност k . Окръжност се допира вътрешно до k в точка T и до страните AB и AC . Допирателната към k в точка T пресича отсечката BC в точка Q . Ако $AB = 6$ намерете дължината на отсечката CQ .

Задача 12.3. а) Да се намерят всички полиноми $f(x, y)$ с реални коефициенти такива, че $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$ за произволни $x, y, z \in \mathbb{R}$.

б) Съществува ли функция $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, която не е полином, но горното равенство е в сила за произволни $x, y, z > 0$?

Задача 12.4. Безкрайно множество M от естествени числа се нарича „добро“, ако съществува естествено число $n \geq 2$ със свойството: за всеки две числа a и b от M , за които $b > a$ и $b - a$ се дели на n , числата

$$a + k \frac{b - a}{n}$$

за $k = 1, 2, \dots, n - 1$ са също от множеството M .

За добро множество от естествени числа $M = \{a_1, a_2, \dots\}$ с $B(M)$ означаваме втория по големина елемент на M .

Ако $M_1, M_2, \dots, M_{2018}$ са две по две непресичащи се добри множества да се намери най-малката стойност на

$$B(M_1) + B(M_2) + \dots + B(M_{2018}).$$