

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 9-11 ноември 2018 г.

София, 2018 г.

Задача 12.1. Да се докаже, че за всяка квадратна функция $f(x) = x^2 + px + q$ е изпълнено:

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x)| \geq \frac{1}{8}.$$

Кога се достига равенство?

Решение. Да допуснем, че $|f(x)| < \frac{1}{8}$ за всяко $x \in [0, 1]$. Тогава

$$-\frac{1}{8} < q < \frac{1}{8} \text{ и } -\frac{1}{8} < 1 + p + q < \frac{1}{8}$$

и следователно

$$-\frac{1}{8} < 1 + p + q < 1 + p + \frac{1}{8} \text{ и } \frac{1}{8} > 1 + p + q > p + \frac{7}{8}.$$

От горните неравенства следва, че $p > -\frac{5}{4}$ и $p < -\frac{3}{4}$, откъдето $-\frac{p}{2} \in [0, 1]$. Тогава

$$f(0) < \frac{1}{8} \iff q < \frac{1}{8}$$

$$f(1) < \frac{1}{8} \iff 1 + p + q < \frac{1}{8}$$

$$f\left(-\frac{p}{2}\right) > -\frac{1}{8} \iff \frac{p^2}{4} - q < \frac{1}{8}$$

Умножаваме първото и второто неравенство с 2, а третото с 4 и събираме почленно. Получаваме $(p + 1)^2 < 0$, което е невъзможно. Следователно

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x)| \geq \frac{1}{8}.$$

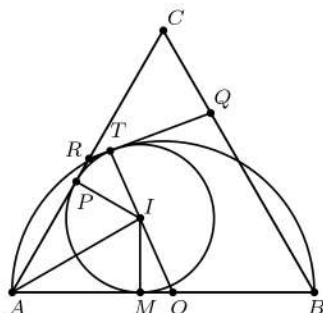
Да допуснем, че този максимум е равен на $\frac{1}{8}$. Тогава $q \leq \frac{1}{8}$, $1 + p + q \leq \frac{1}{8}$ и $\frac{p^2}{4} - q \leq \frac{1}{8}$ (От първите две неравенства следва, че $-\frac{5}{4} \leq p \leq -\frac{3}{4}$ и $-\frac{p}{2} \in [0, 1]$). Ако поне едно от

трите неравенства е строго, както по-горе получаваме противоречие. Следователно и трите неравенства трябва да са равенства, откъдето получаваме $p = -1$ и $q = \frac{1}{8}$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за разглеждане на $f(0)$ и $f(1)$; 1 т. за разглеждане на $f\left(-\frac{p}{2}\right)$; 3 т. за доказване на $\max_{x \in [0,1]} |f(x)| \geq \frac{1}{8}$; 1 т. за случая на равенство.

Задача 12.2. С диаметър страната AB на равностранен $\triangle ABC$ е построена окръжност k . Окръжност се допира вътрешно до k в точка T и до страните AB и AC . Допирателната към k в точка T пресича отсечката BC в точка Q . Ако $AB = 6$ намерете дължината на отсечката CQ .

Решение. Първи начин. Да означим средата на AB с O , допирните точки на окръжността $k'(I, r)$ с AB и AC съответно с M и P и $TQ \cap AC = R$.



Имаме $AM = r\sqrt{3}$, $OM = 3 - r\sqrt{3}$, $OI = 3 - r$ и от правоъгълния триъгълник OMI намираме

$$r^2 + (3 - r\sqrt{3})^2 = (3 - r)^2 \implies r = 2\sqrt{3} - 2.$$

Ако $RC = x$, то $RT = RP = 6 - x - r\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - x$ и степента на точката R спрямо k' е

$$(3 - x)(6 - x) = (2\sqrt{3} - x)^2 \implies x = \frac{18 + 8\sqrt{3}}{11}.$$

Ако $\sphericalangle OIM = \varphi$, то $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3} - 2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$ и $\sphericalangle QRC = 60^\circ - \varphi$.

От синусовата теорема в $\triangle RQC$ намираме

$$CQ = x \frac{\sin(60^\circ - \varphi)}{\sin(60^\circ - \varphi)} = x \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} \varphi} = \frac{18 + 8\sqrt{3}}{11} \cdot \frac{4\sqrt{3} - (3 - \sqrt{3})}{4\sqrt{3} + (3 - \sqrt{3})} = 2.$$

Оценяване. (6 точки) 2 т. за намиране на r ; 2 т. за намиране на CR ; 2 т. за намиране на CQ .

Втори начин. Ако $\sphericalangle BTQ = \alpha$, то поради $\sphericalangle ITQ = \sphericalangle ATB = 90^\circ$ имаме $\sphericalangle ATI = \alpha$. Тогава $\sphericalangle OAT = \alpha$ и $\sphericalangle IAT = \alpha - 30^\circ$. Освен това $\sphericalangle ABT = 90^\circ - \alpha$, откъдето $\sphericalangle TBQ = \alpha - 30^\circ$.

Следователно $\triangle BQT \sim \triangle AIT$ откъдето $\frac{BQ}{QT} = \frac{AI}{IR} = 2$ (тъй като $AI = 2r$).

От друга страна $QT^2 = QB \cdot (QB - 3)$ (от степента на точка Q спрямо k'). От това уравнение и от $BQ = 2TQ$ получаваме $BQ = 4$. Следователно $CQ = 2$.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за подобните триъгълници; 2 т. за степента на Q спрямо k' ; 1 т. за намиране на CQ .

Задача 12.3. а) Да се намерят всички полиноми $f(x, y)$ с реални коефициенти такива, че $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$ за произволни $x, y, z \in R$.

б) Съществува ли функция $f: R^+ \times R^+ \rightarrow R^+$, която не е полином, но горното равенство е в сила за произволни $x, y, z > 0$?

Решение. а) Нека m (n) е степента на $f(u, v)$ като полином на u (v). От даденото равенство следва, че $m^2 = m$ и $n^2 = n$. Значи $m, n \in \{0, 1\}$, т.е. (1) $f(u, v) = auv + bu + cv + d$. След заместване намираме, че $f(u, v)$ има една от следните форми: (2) u, v и $auv + bu + bv + d$, където $ad = b^2 - b$.

б) Съществува – например $f(u, v) = (u + v)/(1 + uv)$.

Оценяване. (7 точки) а) По 2 т. за (1) и (2); б) 3 т.

Задача 12.4. Безкрайно множество M от естествени числа се нарича „добро“, ако съществува естествено число $n \geq 2$ със свойството: за всеки две числа a и b от M , за които $b > a$ и $b - a$ се дели на n , числата

$$a + k \frac{b - a}{n}$$

за $k = 1, 2, \dots, n - 1$ са също от множеството M .

За добро множество от естествени числа $M = \{a_1, a_2, \dots\}$ с $B(M)$ означаваме втория по големина елемент на M .

Ако $M_1, M_2, \dots, M_{2018}$ са две по две непресичащи се добри множества да се намери най-малката стойност на

$$B(M_1) + B(M_2) + \dots + B(M_{2018}).$$

Решение. Нека M е добро множество и да наредим елементите на M по големина $a_1 < a_2 < \dots$. Ще докажем, че всеки n последователни елемента на M дават пълна система от остатъци по модул n . Да допуснем, че съществуват два елемента a_i и a_j , за които $j > i$, $j - i < n$ и $a_j - a_i$ се дели на n . От условието следва, че между a_i и a_j има поне $n - 1$ елемента от множеството, противоречие с $j - i < n$.

Следователно $a_i \equiv a_{i+n} \pmod{n}$ за всяко i , като при това ако означим с $d = \frac{a_{i+n} - a_i}{n}$, то от условието на задачата имаме, че $a_{i+k} = a_i + kd$, за всяко $k = 0, 1, \dots, n$. Доказахме, че всеки n последователни члена на M образуват пълна система остатъци по модул n , като всеки елемент се получава от предишния с прибавяне на едно и също число d . Следователно елементите на M образуват аритметична прогресия с частно d .

Всяко от множествата M_i е аритметична прогресия с първи член a_i и разлика d_i . Нека $D = \text{НОК}(d_1, d_2, \dots, d_{2018})$. Всеки интервал $[a + 1, a + 2, \dots, a + D]$ с дължина D съдържа

$\frac{D}{d_i}$ елемента от M_i . Тъй като множествата M_i не се пресичат, получаваме:

$$\frac{D}{d_1} + \frac{D}{d_2} + \dots + \frac{D}{d_{2018}} \leq D,$$

откъдето

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_{2018}} \leq 1.$$

От това неравенство и от

$$(d_1 + d_2 + \dots + d_{2018}) \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_{2018}} \right) \geq 2018^2$$

получаваме $d_1 + d_2 + \dots + d_{2018} \geq 2018^2$. Следователно

$$\sum_{i=1}^{2018} B(M_i) = \sum_{i=1}^{2018} (a_i + d_i) \geq \sum_{i=1}^{2018} a_i + \sum_{i=1}^{2018} d_i \geq \sum_{i=1}^{2018} i + 2018^2 = 6109495.$$

Тази стойност се достига при $a_i = i$ и $d_i = 2018$.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за доказване, че добро множество е аритметична прогресия; 3 т. за $d_1 + d_2 + \dots + d_{2018} \geq 2018^2$; 1 т. за довършване на решението; 1 т. за пример.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.3 – Иван Тонов; 8.2, 8.4 – Невена Събева; 9.1, 9.2, 10.1 – Диана Данова; 9.3 – Александър Иванов; 9.4, 10.3 – Станислав Харизанов; 10.2 – Стоян Боев; 10.4, 11.1, 11.2, 11.4 – Александър Иванов; 11.3 – Емил Колев; 12.1 – Асен Божилов; 12.2 – Емил Колев; 12.3 – Николай Николов; 12.4 – Александър Иванов.