

## СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

### ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „АКАД. СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“

СОФИЯ, 09-11.11.2018

#### ТЕМА ЗА V КЛАС

5.1. Иван установил, че през  $n$ -тата седмица на 2018 година ще останат точно  $n^2$  дни до края на годината. Намерете  $n$  и точно през кой ден от седмицата ще се случи тази закономерност?

**Решение:**

Равенството, което удовлетворява условието е:  $n^2 = 365 - 7(n - 1) - d$ . 5 т.

С  $n$  сме означили номерът на седмицата, а с  $d$  - ден от седмицата в който се е случило събитието.  $d$  е число от 1 до 7.

Оттук получаваме  $n^2 + 7.n = 372 - d$  или  $n(n + 7) = 372 - d$ .

След проверка при  $d = 1 \dots 7$  4 т.

При  $n = 16$  имаме  $16 \cdot 23 = 368 = 372 - 4 \cdot d = 4$  1 т.

Отг. 16 седмица, четвъртък

5.2. Намерете такова естествено число  $A$ , че  $2.A$  да е точна втора степен на естествено число,  $3.A$  да е точна трета степен на естествено число и  $5.A$  да е точна пета степен на естествено число.

**Решение.**

$2.A = a.a$ ,  $3.A = b.b.b$ ,  $5.A = c.c.c.c.c$

В разлагането на числото  $A$  трябва да има  $k$  пъти множител 2, където  $k$  е нечетно число 1 т.

От второто и третото равенство  $k$  трябва да е кратно на 3 и 5.

Следователно  $k$  може да е 15, 45 .... 2 т.

В разлагането на числото  $A$  трябва да има  $s$  пъти множител 3, където  $s + 1$  се дели на 3 1 т.

От първото и третото равенство  $s$  трябва да е кратно на 2 и 5.

Следователно  $s$  може да е 20, 50 .... 2 т.

В разлагането на числото  $A$  трябва да има  $p$  пъти множител 5, където  $p + 1$  се дели на 5 1 т.

От първото и второто равенство  $p$  трябва да е кратно на 2 и 3.

Следователно  $p$  може да е 24, 60 .... 2 т.

За намиране на число от търсения вид 1 т.

Отг. Най-малкото число  $A$  с това свойство трябва да се дели на 15 двойки, на 20 тройки и на 24 петици.

5.3. На страните  $BC$  и  $CD$  на правоъгълника  $ABCD$  са избрани съответно точки  $M$  и  $N$ , като  $BM = DN$ . Ако правите  $BN$  и  $DM$  се пресичат в точка  $P$ , да се докаже точка  $P$  е равни разстояния от страните  $AB$  и  $AD$ .

**Решение:**

За правилен чертеж

– 1 т.

Ще използваме, че диагонален на правоъгълника го разделя на две части с равни лица (два равнолицеви триъгълника). Така  $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = 2 \cdot S_{BCD}$ . Така  $(AB \cdot AD) : 2 = (CB \cdot CD) : 2 = S_{ABD}$ .

– 2 т.

Ще означим лицето на една триъгълна част, например  $ABC$  с  $[ABC]$ . През точка  $P$  разделяме правоъгълника на четири малки правоъгълника и нека  $PP_1$  и  $PP_2$  са разстоянията от точката  $P$  съответно до страните  $CD$  и  $AB$ . Ще покажем, че  $PP_3 = PP_4$ . Чрез допълване до правоъгълник и изразяване на разлики на лица получаваме

$$[BDN] - [PDN] = [PDB] = [DBM] - [PBM].$$

– 3 т.

Да опишем лицата в горното равенство със отсечки

$$DN \cdot AD - DN \cdot PP_1 = BM \cdot AB - BM \cdot PP_2.$$

– 3 т.

По условие  $DN = BM$ . Делим двете страни на  $DN$  и получаваме:

$$AD - PP_1 = AB - PP_2, \text{ което трябваше да докажем.}$$

– 2 т.

5.4. В отбора по ръгби има 26 състезатели с номера  $\{1, 2, 3, \dots, 25, 26\}$ . Треньорът отделил шест състезатели с номера  $\{a_1, a_2, \dots, a_6\}$ , които няма да играят в следващия мач. Намерете номерата на състезателите  $A\{a_1, a_2, \dots, a_6\}$ , ако знаете, че всички суми по двойки:  $a_1 + a_2, a_1 + a_3, a_1 + a_4, a_1 + a_5, a_1 + a_6, \dots$ , всички суми по тройки:  $a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_4, \dots, a_4 + a_5 + a_6$ , всички суми по четворки:  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \dots, a_2 + a_3 + a_4 + a_5$  и всички суми по петици:  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_6, \dots, a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$  са различни числа (множеството  $A$  от естествени числа с посоченото свойство наричаме е *разпръснато* множество) Докажете, че треньорът не може да определи седем състезатели от отбора, които с номерата си  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_7\}$ , за които да образуват разпръснато множество.

**Решение:**

Допускаме, че можем да намерим седем естествени числа  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_7\}$  и множеството е разпръснато. В множеството  $B$  има 7 подмножества с един елемент, 21 подмножества с 2 елемента, 35 подмножества с 3 елемента и 35 подмножества

(по 1 точка за всяко подмножество) – 4 т.

с 4 елемента или общо  $35 + 35 + 21 + 7 = 98$  подмножества, които имат 98 различни суми. От друго страна най-голямата възможна сума от 4 елемента на даденото множество е  $23 + 24 + 25 + 26 = 98$ , (2 т.) но тези четири числа не могат да участват в множеството  $B$ , защото  $23 + 26 = 24 + 25$ . Следователно най-голямата сума от 4 числа от даденото множество е 97, (2 т.) т.е. няма как 98 подмножества да получат 98 различни числа за суми. Противоречие. (2 т.)

