

ТЕМА ЗА 7 КЛАС

7.1. Даден е изразът $B = (5x - 2)^2 - 2(x - 4)(5x - 2) + (x - 4)^2$.

а) Намерете стойността на израза B при $x = 2017\frac{3}{4} \cdot 2018\frac{1}{4} - 2017\frac{1}{4} \cdot 2018\frac{3}{4}$.

б) Докажете, че за всяка стойност на променливата x стойността на израза B е не по-малка от стойността на $A = |2^{33} - 3^{22}| + |81^6 - 9^{11}| + |8^{11} - 2^{32}| - |3^{24} - 4^{16}|$.

Решение: а) За намиране на $x = 0,5$

2 т.

За намиране на стойността на $B = 16$

3 т.

б) За намиране на $A = 0$

2 т.

За преобразуване на B във вид на квадрат на двучлен и доказване на неравенството

3 т.

7.2. Лека кола и автобус тръгнали едновременно от град A към град B и се движили, без да спират. Скоростта на леката кола се отнасяла към скоростта на автобуса както $10 : 7$. Леката кола пристигнала в град B в 10:50 ч., а автобуса – в 11:20 ч.

а) Намерете в колко часа те са тръгнали от град A .

б) Когато леката кола била изминала 80 % от разстоянието между двата града, тя срещнала камион, пътуващ за град A . Намерете в колко часа са се срещнали камионът и автобусът, ако скоростта на автобуса е била с 40 % по-голяма от скоростта на камиона.

Решение: а) Скоростта и времето за изминаване на определено разстояние са обратно пропорционални величини. Следователно времето за целия път на леката кола се отнася към времето на автобуса както $7 : 10$.

Ако $t_{\text{колата}} = 7x$, а $t_{\text{автобуса}} = 10x$, тогава $10x - 7x = 30 \text{ min}$, т.е. $x = 10 \text{ min}$. 1 точка

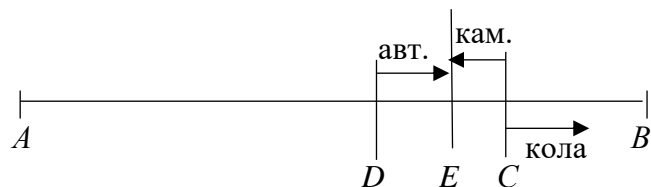
Леката кола е пътува $7 \cdot 10 = 70 \text{ min}$, автобусът – $10 \cdot 10 = 100 \text{ min}$. т.е. те са тръгнали от град A в 9:40 ч. 3 точки

б) Нека разстоянието между двата града е S . Нека колата е срещнала камиона в точка C и в момента на срещата им автобусът се е намирал в т. D . Разстоянията, изминати от колата и автобуса за едно и също време е право пропорционално на скоростите им.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{10}{7} \Rightarrow AD = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{5} S = \frac{14}{25} S.$$

$$DC = \frac{4}{5} S - \frac{14}{25} S = \frac{6}{25} S.$$

2 точка



Разстоянията DE и CE , изминати от камиона и автобуса до срещата им, са пропорционални на скоростите им, т.е. $\frac{DE}{CE} = \frac{140}{100} = \frac{7}{5}$. Ако $DE = 7y$ и $CE = 5y$, то

$$7y + 5y = \frac{6}{25}S \text{ и} \quad 2 \text{ точки}$$

$y = \frac{6}{25}S \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{50}S$. Тогава от A до срещата автобусът е изминал разстоянието

$$AE = \frac{14}{25}S + \frac{7}{50}S = \frac{7}{10}S \quad 1 \text{ точка}$$

за време, равно на $\frac{7}{10} \cdot 100 = 70 \text{ min}$. Следователно срещата е станала в 10:50 ч.

1 точка

7.3. Диагоналите на трапеца $ABCD$ се пресичат в точка M . Права, минаваща през точка M и успоредна на бедрото AD , пресича голямата основа AB на трапеца в точка N . Правата CN пресича диагонала BD в точка O .

а) Докажете, че лицето на триъгълника BOC е равно на лицето на четириъгълника $ANOM$;

б) Ако лицата на триъгълниците NOB и COD са съответно равни на 16 cm^2 и 9 cm^2 , намерете лицето на трапеца.

Решения: **а)** От $AB \parallel CD \Rightarrow S_{BOC} = S_{DNO}$.

$$S_{DNO} = S_{DNM} + S_{NMO}. \quad 1 \text{ точка}$$

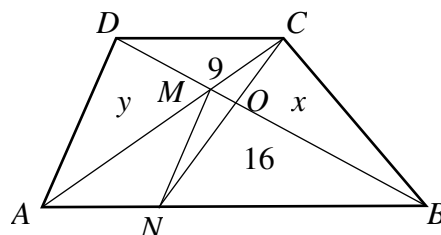
От $MN \parallel AD \Rightarrow S_{DNM} = S_{ANM}$.

$$\text{Тогава } S_{DNO} = S_{DNM} + S_{NMO} = S_{ANM} + S_{NMO} = S_{ANOM}. \quad 2 \text{ точка}$$

б) Нека $S_{BOC} = S_{DON} = S_{ANOM} = x$. От $\frac{S_{BOC}}{S_{COD}} = \frac{BO}{DO} = \frac{S_{BON}}{S_{DON}}$ получаваме $\frac{x}{9} = \frac{16}{x}$ и $x^2 = 144$,

т.е. $x = 12 \text{ cm}^2$. 2 точка

Нека $S_{AMD} = S_{BMC} = y \text{ cm}^2$ (от $AB \parallel CD$). Тогава $S_{DMC} = 9 - (y - 12) = 21 - y$.



От $\frac{S_{AMB}}{S_{AMD}} = \frac{BM}{DM} = \frac{S_{BMC}}{S_{DMC}}$ получаваме $\frac{16+12}{y} = \frac{y}{21-y}$ и $y^2 = 28(21-y)$. 2 точки

Решаваме уравнението $y^2 + 28y - 588 = 0$, като го записваме във вида $(y + 14)^2 = 784 = 28^2$ и намираме, че $y + 14 = 28$, т.е. $y = 14$. 2 точки

Тогава лицето на трапеца $ABCD$ е

$$S = S_{BON} + S_{BOC} + S_{DOC} + S_{ANOM} + S_{AMD} = 16 + 12 + 9 + 12 + 14 = 63 \text{ cm}^2.$$

1 точки

7.4. Множеството M се състои от числата от вида $3^k + 1, 4^k - 1, 5^k$ и $5^k + 1$, където k е естествено число, по-малко или равно на 50. Да се намери вероятността сборът на две случайно избрани числа от множеството M да се дели на 6.

Решение:

$$3^k + 1 \equiv 4 \pmod{6}; 4^k - 1 \equiv 3 \pmod{6}; 5^k \equiv 1 \pmod{6} \text{ за } k = 2p \text{ и } 5^k \equiv 5 \pmod{6} \text{ за } k = 2p + 1;$$

$$5^k + 1 \equiv 2 \pmod{6} \text{ за } k = 2p \text{ и } 5^k + 1 \equiv 0 \pmod{6} \text{ за } k = 2p + 1.$$

2 точка

Сбор на две числа, който се дели на 6, можем да получим по следните начини:

число от вида $3^k + 1$ и число от вида $5^{2p} + 1$: $50 \cdot 25$ двойки 2 точка

число от вида 5^{2p} и число от вида 5^{2p+1} : $25 \cdot 25$ двойки 1 точка

две числа от вида $4^k - 1$: $(50 \cdot 49):2$ двойки 1 точка

две числа от вида $5^{2p+1} + 1$: $(25 \cdot 24):2$ двойки 1 точка

Общо благоприятни двойки: $25 \cdot (50 + 25 + 49 + 12) = 25 \cdot 136$ 1 точка

Всички възможни двойки числа са $(200 \cdot 199):2 = 100 \cdot 199$ 1 точки

Вероятността p сборът на две числа да е кратен на 6 е $p = \frac{25 \cdot 136}{100 \cdot 199} = \frac{34}{199}$. 1 точки

Автори на задачите:

5.1. Катя Чалъкова, **5.2, 5.3 и 5.4** Емил Карлов

6.1. Иван Ангелов, **6.2.** Татяна Мерджанова, **6.3.** Иван Ангелов, **6.4.** Емил Карлов

7.1. Гергана Николова, **7.2. и 7.3.** Таня Стоева, **7.4.** Юлиан Цветков