

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 9-11 ноември 2018 г.

София, 2018 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Да се докаже, че при $k \geq 25$ неравенството $x^4 + (2k - 99)x^2 - 10x + k^2 + k \geq 0$ е изпълнено за всяко реално число x .

Решение. Разлагаме израза от лявата част на неравенството на множители:

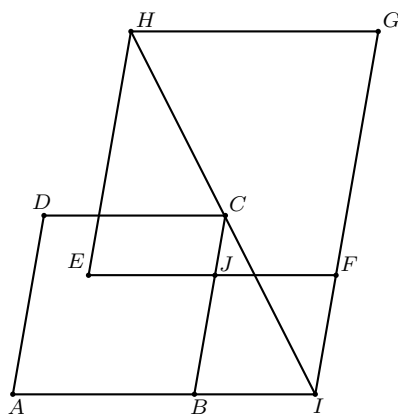
$$x^4 + (2k - 99)x^2 - 10x + k^2 + k = (x^2 - 10x + k)(x^2 + 10x + k + 1) = ((x - 5)^2 + k - 25)((x + 5)^2 + k - 24)$$

При $k \geq 25$ за двата множителя имаме $(x - 5)^2 + k - 25 \geq 0$ и $(x + 5)^2 + k - 24 > 0$. Следователно тяхното произведение е неотрицателно.

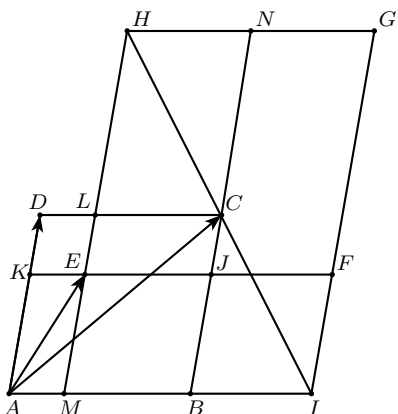
Оценяване. (6 точки) 4 т. за разлагане като произведение на два квадратни тричлена; по 1 т. за доказване, че всеки от тях е неотрицателен при $k \geq 25$.

Задача 8.2. Ромбовете $ABCD$, $EFGH$ и $BIFJ$ със страни съответно a , b и c са разположени, както е показано на чертежа ($B \in AI$, $F \in IG$) и C е среда на IH .

- Да се намери отношението $a : b : c$.
- Да се докаже, че E е медицентърът на $\triangle ACD$.
- Да се докаже, че правата AE разполювява страната GH .



Решение. а) Ако $L = DC \cap HE$, то $EJCL$ е успоредник. От $\triangle BIC \cong \triangle LCH$ следва, че $BI = LC \iff b = 2c$ и $BC = LH \iff a = b + c - a$, откъдето $2a = 3c$. Получаваме $a : b : c = 3 : 4 : 2$.



- б) Ако $K = EF \cap AD$ и $M = AB \cap EH$, то $AMEK$ е успоредник със страни $AM = a + c - b = \frac{1}{3}a$, $AK = b - c = \frac{2}{3}a$ и

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD},$$

следователно E е медицентър на $\triangle ACD$.

в) Ако N е средата на HG , то CN е средна отсечка в $\triangle HIG$, т.е. $CN = \frac{1}{2}(b + c) = a$, $CN \parallel IG \parallel AD$, откъдето следва, че $ACND$ е успоредник. Тогава AN разполовява CD , а от а) следва, че AE разполовява CD ; получихме, че $N \in AE$.

Същият факт може да се докаже, като се забележи, че

$$\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{EH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AE}.$$

Оценяване. (6 точки) по 2 т. за всяка подточка.

Задача 8.3. Нека M е множеството от всички петцифрени числа от вида $\overline{a_1a_20b_1b_2}$, които са точни квадрати и $\overline{b_1b_2} = \overline{a_1a_2} + 1$.

а) Да се намерят всички елементи на M , които са кратни на 5.

б) Да се намерят всички елементи на M .

Решение. Отговор. 24025 и 75076.

Нека $N = \overline{a_1a_20b_1b_2} = n^2$. Тогава $b_2 \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.

Ако $b_2 = 0$, тъй като N е точен квадрат, то $b_1 = 0$, което е невъзможно ($\overline{b_1b_2} = \overline{a_1a_2} + 1 \geq 11$).

Ако $b_2 = 5$, тъй като N е точен квадрат, то $b_1 = 2$. Получаваме числото $24025 = 5^2 \cdot 31^2$, което е решение на задачата.

Остава да разгледаме $b_2 \in \{1, 4, 6, 9\}$, т.е.

$$(1) \quad a_2 \in \{0, 3, 5, 8\}.$$

Имаме

$$(2) \quad N = 1001 \overline{a_1a_2} + 1 = n^2.$$

Тъй като $n^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$ и $n^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$, то

$n^2 \equiv 0, 1, 4, 9, 16, 20, 24, 25, 36 \pmod{40}$. Оттук и от (2) следва, че

$$(3) \quad \overline{a_1a_2} \equiv 0, 3, 8, 15, 19, 23, 24, 35, 39 \pmod{40}.$$

От (1) и (3) следва, че

$$(4) \quad \overline{a_1a_2} \in \{40, 80, 43, 83, 48, 88, 15, 55, 95, 23, 63, 35, 75\}.$$

Освен това $n^2 \equiv 0, 1, 4, 7 \pmod{9}$ и от (2) следва, че

$$(5) \quad \overline{a_1a_2} \equiv 0, 3, 4, 6 \pmod{9}.$$

От (4) и (5) получаваме, че

$$\overline{a_1a_2} \in \{40, 48, 15, 63, 75\}.$$

Проверяваме петте възможности. Числата $40041 = 3^3 \cdot 1483$, $15016 = 2^3 \cdot 1877$ и $63064 = 2^3 \cdot 7883$ не са точни квадрати заради нечетните показатели на 2 или 3 в разлагането им. Числото 48049 е просто (за да се види, че 48049 не е точен квадрат, може да се използва и че квадратичните остатъци по модул 17 са 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16, а $48049 \equiv 7 \pmod{17}$). Числото $75076 = 2^2 \cdot 137^2$ е решение на задачата.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за а) и 5 т. за б).

Задача 8.4. По колко различни начина квадратчетата в таблица 3×7 могат да се оцветят в жълт, червен или син цвят така, че да няма съседни едноцветни квадратчета? (Две квадратчета са съседни, ако имат обща страна.)

Решение. Оцветяване без едноцветни съседни квадратчета ще наричаме *добро*.

Последният стълб на добре оцветена таблица е от вида

$$1) \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline x \\ \hline \end{array} \quad \text{или} \quad 2) \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline z \\ \hline \end{array},$$

където x , y и z са различни цветове.

Нека a_n е броят на различните добри оцветявания на таблица $3 \times n$, при които последният стълб е от вид 1), т.е. е оцветен в два цвята. С b_n означаваме броя на различните добри оцветявания на таблица $3 \times n$, при които последният стълб е от вид 2), т.е. е оцветен в три различни цвята. Всички добри оцветявания на таблица $3 \times n$ са $s_n = a_n + b_n$ на брой.

Добрите оцветявания на таблица $3 \times n$ се получават, като добрите оцветявания на таблица $3 \times (n-1)$ от вид 1) се продължат по някой от следните пет начина:

$$\begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline x \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline x \\ \hline y \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline x \\ \hline z \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline x \\ \hline z \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline x \\ \hline y \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline z \\ \hline y \\ \hline \end{array}$$

или като добрите оцветявания на таблица $3 \times (n-1)$ от вид 2) се продължат по някой от следните четири начина:

$$\begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline z \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline x \\ \hline y \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline x \\ \hline y \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline z \\ \hline y \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline z \\ \hline x \\ \hline \end{array}.$$

Следователно

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n &= 2a_{n-1} + 2b_{n-1} \end{aligned}$$

и като съберем равенствата и използваме, че $b_n = 2(a_{n-1} + b_{n-1}) = 2s_{n-1}$, получаваме

$$\begin{aligned} s_n = a_n + b_n &= 5a_{n-1} + 4b_{n-1} = \\ &= 5(a_{n-1} + b_{n-1}) - b_{n-1} = \\ &= 5s_{n-1} - 2s_{n-2}. \end{aligned}$$

Остава да намерим $a_1 = b_1 = 6$, $s_1 = 12$, $s_2 = 5 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 54$ и да пресметнем първите 7 члена на редицата:

$$12, 54, 246, 1122, 5118, 23346, 106494.$$