

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

Задача 9.1. Дадено е уравнението

$$x^2 + \frac{64}{x^2} = a \left(x - \frac{8}{x} \right) + 2,$$

където a е параметър, естествено число. За кои стойности на a уравнението има 4 рационални корена?

Задача 9.2. Даден е успоредник $ABCD$, за който $BD \perp AD$. Точките A_1 и A_2 са петите на перпендикулярите, спуснати от A съответно към правите CD и BC . Отсечката A_1A_2 пресича AB в точка P , а $AC \cap BD = O$. Ако правите OP и AD се пресичат в точка M , докажете че точките A_1, O, A_2 и M лежат на една окръжност.

Задача 9.3. Подмножество M на множеството $\{1, 2, \dots, 2018\}$ се нарича „добро“, ако за всеки две числа a и b от M , за които $b > a$ и $b - a$ се дели на 30, числата

$$a + k \frac{b - a}{30}$$

за $k = 1, 2, \dots, 29$ са също от множеството M . Колко са добрите множества с 218 елемента.

Задача 9.4. Намерете всички трицифрени естествени числа n , за които съществува естествено число k , такова, че броят на естествените двойки решения (x, y) на системите от неравенства

$$\left| \begin{array}{l} x + y \leq n + 1 \\ y \geq k \end{array} \right| \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{l} x + y \leq n + 1 \\ y < k \end{array} \right|$$

да е един и същ. Пример за едноцифрено n , удовлетворяващо условието е $n = 3$, където при $k = 2$ броят решения на двете системи е по 3: $\{(1, 2), (2, 2), (1, 3)\}$ на първата, респективно $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$ на втората.