

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 9-11 ноември 2018 г.

София, 2018 г.

Забележка: Ако $AA_1 \cap DC = X$, $AA_2 \cap BC = Y$, то разглежданата окръжност е окръжността на деветте точки за $\triangle XYC$.

Тъй като a е естествен параметър, а б.о.о. можем да допуснем, че s също е естествено число, имаме че $s + a > s - a$ като и двете числа са от еднаква четност. Имаме следните две възможности:

$$\begin{cases} a - s = 2 \\ a + s = 28 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 15, s = 13. \\ t_1 = 1; t_2 = 14. \end{cases}$$

Но и при двете стойности на t , $t^2 + 32$ не е точен квадрат, следователно този случай не води до решение. Остава да проверим

$$\begin{cases} a - s = 4 \\ a + s = 14 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 9, s = 5 \\ t_1 = 2; t_2 = 7 \end{cases} \implies \begin{cases} x_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \{-2, 4\}. \\ x_{3,4} = \frac{7 \pm 9}{2} = \{-1, 8\}. \end{cases}$$

Окончателно, единственото решение на задачата е $a = 9$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за полагането $t = x - \frac{8}{x}$ и достигането до уравнение (1); 1 т. за намирането на дискриминантата на квадратното уравнение и заключаването, че тя трябва да е точен квадрат; 2 т. за разглеждането на различните случаи и получаването на възможните стойности за $a = \{9, 15\}$; 1 т. за отхвърлянето на случая $a = 15$; 1 т. за проверката, че $a = 9$ е решение.

Задача 9.2. Даден е успоредник $ABCD$, за който $BD \perp AD$. Точките A_1 и A_2 са петите на перпендикулярите, спуснати от A съответно към правите CD и BC . Отсечката A_1A_2 пресича AB в точка P , а $AC \cap BD = O$. Ако правите OP и AD се пресичат в точка M , докажете че точките A_1, O, A_2 и M лежат на една окръжност.

Решение. Тъй като AA_2BD е правоъгълник, то $A_2B = AD = BC$ и значи, B – среда на A_2C . Но $BP \parallel CA_1$, следователно BP е средна отсечка в $\triangle CA_1A_2$. Четириъгълникът AA_2CA_1 е вписан с център O (среда на хипотенузата AC в $\triangle ACA_1$ и $\triangle ACA_2$), следователно OP е симетралата на A_1A_2 , $\triangle MA_2O \cong \triangle MA_1O$ и

$$\sphericalangle MA_1O = \sphericalangle MA_2O.$$

Остава да покажем, че тези ъгли са по 90° , като за целта е достатъчно да докажем, че четириъгълникът MA_2OD е вписан и следователно $\sphericalangle MA_2O = 180^\circ - \sphericalangle MDO = 90^\circ$. Нека означим $\sphericalangle DCB = \alpha$. Използвайки, че PA_2BO е вписан (срещуположни прави ъгли), получаваме $\sphericalangle MOA_2 = \sphericalangle ABA_2 = \sphericalangle DCB = \alpha$. От друга страна, DB е височина и медиана в $\triangle A_2CD$, следователно триъгълникът е равнобедрен и от успоредността на правите AD и BC получаваме $\sphericalangle MDA_2 = \sphericalangle DA_2C = \sphericalangle DCA_2 = \alpha$. От равенството $\sphericalangle MOA_2 = \alpha = \sphericalangle MDA_2$ заключаваме, че MA_2OD е вписан, с което задачата е решена.

Забележка: Ако $AA_1 \cap DC = X$, $AA_2 \cap BC = Y$, то разглежданата окръжност е окръжността на деветте точки за $\triangle XYC$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за доказване, че P е среда на A_1A_2 ; 1 т. за доказване, че $OP \perp A_1A_2$; 2 т. за доказване, че D, O и две от трите точки A, A_1, A_2 лежат на една окръжност; 2 т. за доказване, че всичките 5 точки лежат на една окръжност.

Задача 9.3. Подмножество M на множеството $\{1, 2, \dots, 2018\}$ се нарича „добро“, ако за всеки две числа a и b от M , за които $b > a$ и $b - a$ се дели на 30, числата

$$a + k \frac{b - a}{30}$$

за $k = 1, 2, \dots, 29$ са също от множеството M . Колко са добрите множества с 218 елемента.

Решение. Отговор: 2300. Нека M е добро множество и да наредим елементите на M по големина $a_1 < a_2 < \dots < a_{218}$. Ще докажем, че всеки 30 последователни елемента на M дават пълна система от остатъци по модул 30. Да допуснем, че съществуват два елемента a_i и a_j , за които $j > i$, $j - i < 30$ и $a_j - a_i$ се дели на 30. От условието следва, че между a_i и a_j има поне 29 елемента от множеството, противоречие с $j - i < 30$.

Следователно $a_i \equiv a_{i+30} \pmod{30}$ за всяко i , като при това ако означим с $d = \frac{a_{i+30} - a_i}{30}$, то от условието на задачата имаме, че $a_{i+k} = a_i + kd$, за всяко $k = 0, 1, \dots, 30$. Доказахме, че всеки 30 последователни члена на M образуват пълна система остатъци по модул 30, като всеки елемент се получава от предишния с прибавяне на едно и също число d . Следователно това свойство е вярно за всички елементи на M , като d е взаимнопросто с 30.

Тъй като $2018 = 201 \cdot 10 + 8 < 217 \cdot 10 + 1$, то заключаваме, че $d \leq 9$ и $(d, 30) = 1$, което води до единствените възможности $d \in \{1, 7\}$.

При $d = 1$ имаме 1801 добри множества, т.к., $217 \cdot 1 + 1 = 218 \leq a_{218} \leq 2018$ и всеки различен избор на a_{218} води до различно множество M .

При $d = 7$ имаме 499 добри множества, т.к. $217 \cdot 7 + 1 = 1520 \leq a_{218} \leq 2018$. Окончателно, има $1801 + 499 = 2300$ различни множества M .

Оценяване. (7 точки) 2 т. за извода, че всеки 30 последователни числа от M образуват ПСО по модул 30; 2 т. за доказателство, че числата образуват аритметична прогресия със стъпка d , взаимнопроста с 30; 1 т. за ограничаването на случаите до $d \in \{1, 7\}$; по 1 т. за преброяване на добрите множества за всяко от двете възможни d .

Задача 9.4. Намерете всички трицифрени естествени числа n , за които съществува естествено число k , такова, че броят на естествените двойки решения (x, y) на системите от неравенства

$$\begin{cases} x + y \leq n + 1 \\ y \geq k \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y \leq n + 1 \\ y < k \end{cases}$$

да е един и същ. Пример за едноцифрено n , удовлетворяващо условието е $n = 3$, където при $k = 2$ броят решения на двете системи е по 3: $\{(1, 2), (2, 2), (1, 3)\}$ на първата, респективно $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$ на втората.

Решение. Естествените двойки решения (x, y) на неравенството $x + y \leq n + 1$ са целочислените възли в правоъгълен, равнобедрен триъгълник с върхове $(1, 1)$, $(1, n)$ и $(n, 1)$. Следователно, за всяко естествено $1 \leq s \leq n$, броят решения на системата

$$\begin{cases} x + y \leq n + 1 \\ y = s \end{cases}$$

е точно $n + 1 - s$. Нека означим $\ell = n + 1 - k$. Тогава първата система в условието на задачата има $\frac{\ell(\ell + 1)}{2}$ двойки естествени решения (x, y) , докато всички решения на двете системи заедно са $\frac{n(n + 1)}{2}$. Задачата се свежда до намирането на такива трицифрени n , за които съществува естествено ℓ , такова че е изпълнено следното твърждение:

$$\frac{\ell(\ell + 1)}{2} = \frac{n(n + 1)}{4}. \quad (2)$$

Умножавайки двете страни по 8 и прибавяйки единица към тях, стигаме до еквивалентния израз

$$(2\ell + 1)^2 = n^2 + (n + 1)^2. \quad (3)$$

Първи начин: Да означим с $y = 2\ell + 1$ и $x = 2n + 1$. Тогава, след елементарни преобразувания, (3) се трансформира в уравнението на Пел

$$x^2 - 2y^2 = -1, \quad (4)$$

за което $(1, 1)$ е фундаментално решение. Следователно всичките му решения (x_m, y_m) се задават чрез формулата:

$$x_m + \sqrt{2}y_m = (1 + \sqrt{2})^{2m-1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Измежду тях, ние търсим тези x_m , при които $100 \leq \frac{x_m - 1}{2} \leq 999$. Пресмятането на първите няколко решения води до $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (7, 5)$, $(x_3, y_3) = (41, 29)$, $(x_4, y_4) = (239, 169)$, $(x_5, y_5) = (1393, 885)$. Лесно се вижда, че x_6 вече е твърде голямо и води, до четирицифрено n . Следователно, единствено x_4 и x_5 удовлетворяват условието и водят до двете решения на задачата: $n = 119$, съответно $n = 696$. За тях съответните ℓ са $\ell = 84$ и $\ell = 442$ и значи $k = 36$, респективно $k = 225$.

Втори начин: Използваме (с доказателство!) следната теорема: Нека (a, b, c) е Питагорова тройка с генератор (r, s) , т.е. $a^2 + b^2 = c^2$, $a = r^2 - s^2$, $b = 2rs$, $c = r^2 + s^2$. Тогава $|a - b| = 1$ тогава и само тогава, когато $(2r + s, r)$ е генератор на подобна Питагорова тройка. Едно възможно доказателство на теоремата е представено в следния линк: https://proofwiki.org/wiki/Generator_for_Almost_Isosceles_Pythagorean_Triangle.

Започваме от примера, даден в условието, който отговаря на тройката $(3, 4, 5)$, генерирана от $(r, s) = (2, 1)$. Следователно, следващата такава Питагорова тройка се генерира от $(2 \cdot 2 + 1, 2) = (5, 2)$ и е $(20, 21, 29)$. Следващата се генерира от $(2 \cdot 5 + 2, 5) = (12, 5)$ и е $(119, 120, 169)$. Следващата се генерира от $(2 \cdot 12 + 5, 12) = (29, 12)$ и е $(696, 697, 985)$. Оттук нататък, най-малката страна в следващите Питагорови тройки надхвърля 1000 и не удовлетворява условието на задачата. Окончателно $n = \{119, 696\}$ са търсените решения.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за достигане до уравнение (3); по 1 т. за намиране на всяко от двете решения; 4 т. за доказване, че други решения няма.