

Есенен математически турнир „Стефан Додунеков“

Задача 10. 1. Дадени са квадратните функции

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad \text{и} \quad g(x) = x^2 + bx + a$$

с реални параметри a и b . Известно е, че уравнението $f(x)g(x) = 0$ има четири различни реални корена и тяхното произведение е 10. Ако графиките на функциите $f(x)$ и $g(x)$ се пресичат в единствена точка A и тя е на разстояние $\sqrt{65}$ от началото на координатната система, да се намерят a и b .

Задача 10. 2. Точките P , Q и R съответно от страните BC , CA и AB на триъгълник ABC са такива, че правите AP , BQ и CR се пресичат в точка S . Ако

$$S_{ABS} = S_{QSPC} \quad \text{и} \quad \frac{S_{ARC}}{S_{BRC}} = \frac{|CA|^4}{|BC|^4},$$

да се докаже, че четириъгълникът $ABPQ$ е вписан в окръжност.

Задача 10. 3. Нека $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редицата:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = 3x_{n+1} + x_n \quad \text{за} \quad n \geq 0.$$

Да се намерят всички прости числа $p \in [2000; 2100]$, чийто десетичен запис завършва на 9 и $p|x_{p-1}$.

Задача 10. 4. В едно училище, в школата за десети клас по математика участват 22-ама десетокласници. Някои от тях са *приятели* в новата социална платформа Графнет, а други – не.

Известно е, че ръководителят на школата не може да даде за домашно 10 различни задачи, по една на всеки ученик, така че всеки двама *приятели* в Графнет да получат различна задача.

Да се намери възможно най-големият брой групи от десетокласници, никои двама от които не са приятели в Графнет, за които това може да се случи.