

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Стефан Додунеков“

София – Плевен, 9 – 11 ноември 2019 г.

София, 2019 г.

Задача 8. 1. Да се намерят всички цели стойности на x , за които стойността на израза

$$M = |x^3 - 2x^2 - 10x + 8|$$

е просто число.

Решение. Разлагаме $M = |x - 4||x^2 + 2x - 2|$. M ще е просто число, ако единият множител е равен на 1, а другият е просто число.

1 сл. $|x - 4| = 1 \Rightarrow x \in \{3, 5\}$. При $x = 3$ получаваме $M = 13$, което е просто. При $x = 5$ получаваме $M = 33$, което не е просто.

2 сл. $|x^2 + 2x - 2| = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = \pm 1$. От първото уравнение намираме $x = 1$ или $x = -3$ и, съответно, $M = 3$ или $M = 7$, които са прости числа. Второто уравнение е еквивалентно на $(x + 1)^2 = 2$, което няма решение в цели числа.

Окончателно, решенията са $x = 1$ и $x = \pm 3$.

Оценяване (6 точки): 2 т. – за разлагането на M ; по 2 т. – за решаването на всеки от двата случая.

Задача 8. 2. Даден е триъгълник ABC . В полуравнината с контур правата BC , несъдържаща точка A , е взета точка P , така че $CP \perp BC$ и $CP = BC$, а в полуравнината с контур правата AC , несъдържаща точка B , е взета точка Q , така че $CQ \perp AC$ и $CQ = AC$. Точка F от отсечката AP е такава, че $\sphericalangle CFP = \sphericalangle BQP$.

а) Да се докаже, че CF разполовява страната AB .

б) Нека AP пресича BC в точка N . Ако $CN : BN = 1 : 2$, да се намери отношението $AF : FN$.

Решение. а) Нека $CF \cap PQ = E$ и $BQ \cap AP = O$. От $\triangle APC \cong \triangle QBC$ получаваме, че $\sphericalangle POQ = 90^\circ$, а от $\sphericalangle CFP = \sphericalangle BQP$ следва, че $\sphericalangle PEF = 180^\circ - \sphericalangle EFP - \sphericalangle EPF = 180^\circ - \sphericalangle PQO - \sphericalangle QPO = \sphericalangle POQ = 90^\circ$. Тогава $\sphericalangle FCB = 90^\circ - \sphericalangle PCE = \sphericalangle CPQ$.

Построяваме точка L , такава че $ALBC$ е успоредник. От $\triangle LBC \cong \triangle QCP$ следва, че $\sphericalangle LCB = \sphericalangle CPQ = \sphericalangle FCB$, т.е., че $F \in CL$. Но от свойството на диагоналите в успоредника следва, че $CL \cap AB = M$ – среда на AB .

б) Нека K е средата на BN . От FN средна отсечка в триъгълник MKC следва, че $MK = 2FN$. От MK средна отсечка в триъгълник ABN следва, че $AN = 2MK = 4FN$. Тогава $AF : FN = 3 : 1$.

Оценяване (6 точки): а) 1 т. – за $\sphericalangle POQ = 90^\circ$; 1 т. – за $\sphericalangle FCB = \sphericalangle CPQ$; 2 т. – за M среда на AB .

б) 2 т. – за $AF : FN = 3 : 1$.

Задача 8. 3. Да се намерят всички естествени числа p и n , такива че p е просто и

$$p^3 + 5n - 1 = n(p^2 + 2p + 6n).$$

Решение. Условието е равносилно с $p(p^2 - pn - 2n) = (2n - 1)(3n - 1)$, така че p дели $2n - 1$

или $3n - 1$. Ако $2n - 1 \geq 2p$ или $3n - 1 \geq 3p$, то лявата страна е отрицателна, а дясната – положителна. Остава да проверим случаите:

- $p = 2n - 1$, което не води до естествени решения;
- $p = 3n - 1$, което не води до естествени решения;
- $2p = 3n - 1$, което води до

$$\begin{aligned}p^2 - pn - 2n &= 4n - 2 \\9n^2 - 6n + 1 - 2n(3n - 1) &= 24n - 8 \\3n^2 - 28n + 9 &= 0 \\(3n - 1)(n - 9) &= 0,\end{aligned}$$

чието естествено решение е само $n = 9$. Оттук $p = 13$ и условията са изпълнени.

Оценяване (7 точки): 2 т. – за доказателство, че p дели $2n - 1$ или $3n - 1$; по 1 т. – за пълно изследване на всеки от случаите $2n - 1 \geq 2p$, $2n - 1 = p$, $3n - 1 \geq 2p$, $3n - 1 = p$.

Задача 8. 4. На дъска е записано по един път всяко трицифрено число, имащо сбор на цифрите 12. При първия ход се изтриват всички числа, които съдържат една или повече от цифрите 0, 8 и 9. При всеки следващ ход се изтриват по три числа, такива че цифрите на една от позициите им съвпадат, а във всяка от останалите две позиции се различават с 1 или с 2. Ако накрая на дъската останало само едно число, то кое може да е то?

Решение. Нека на ход след първия се изтриват три числа, такива че на една от позициите им е цифрата a , на другата са $b - 1$, b и $b + 1$, а на третата са $c - 1$, c и $c + 1$. Тогава сборът на всички първи цифри намалява с кратно на 3. След първия ход има 4 числа с първа цифра 1 (147, 156, 165, 174), 5 с първа цифра 2, 6 – с 3, 7 – с 4, 6 – с 5, 5 – с 6 и 4 – със 7, така че сборът на всички първи цифри е

$$4.1 + 5.2 + 6.3 + 7.4 + 6.5 + 5.6 + 4.7 = 148.$$

Това дава остатък 1 при деление на 3, следователно първата цифра на търсеното число може да е само 1, 4 и 7. По същия начин доказваме, че и останалите му цифри са 1, 4 или 7. И така, тъй като сумата от цифрите е 12, последното число може да е само 147, 174, 417, 444, 471, 714 или 741.

За да получим 444, може да изтрием

(174, 264, 354), (273, 363, 453), (372, 462, 552), (471, 561, 651),
(417, 426, 435), (327, 336, 345), (237, 246, 255), (147, 156, 165),
(741, 642, 543), (732, 633, 534), (723, 624, 525), (714, 615, 516).

За да получим 174, в горния списък може да заменим първото изтриване с (264, 354, 444).

За да получим някое от останалите, прилагаме списъка за 174 с подходящо разместени позиции в зависимост от позициите на 1, 7 и 4 в желаното число.

Оценяване (7 точки): 1 т. – за доказателство, че сборът намалява с кратно на 3; 2 т. – за откриване на всички възможни последни числа; 1 т. – за конструкция, реализираща 444; по 0.5 т. – за конструкция, реализираща всеки от останалите шест примера.