

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

Велико Търново, 18-20 ноември 2022 г.

София, 2022 г.

Задача 10.1. Да се реши ирационалното уравнение:

$$3\sqrt{3x-1} = x^2 + 1.$$

Решение. Отговор: $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Даденото уравнение има смисъл при $x \geq \frac{1}{3}$. Нека въведем ново неизвестно $t = \sqrt{3x-1} \geq 0$. Тогава ирационалното уравнение е еквивалентно на следната система:

$$\left| \begin{array}{l} t \geq 0 \\ t^2 = 3x - 1 \\ 3t = x^2 + 1 \end{array} \right| \text{ или } \left| \begin{array}{l} t \geq 0 \\ 3x = t^2 + 1 \\ 3t = x^2 + 1 \end{array} \right| \quad (*).$$

(За решенията на тази система ще бъде изпълнено и $x \geq \frac{1}{3}$.)

Сега след почленно изваждане на двете уравнения на системата (*) последователно получаваме $3(x-t) = t^2 - x^2$, $(x-t)(3+x+t) = 0$, т.е. $x = t$ или $x+t+3 = 0$.

Следователно системата (*) е еквивалентна на обединението на двете системи

$$\left| \begin{array}{l} t \geq 0 \\ x = t \\ 3t = x^2 + 1 \end{array} \right| \quad (**) \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{l} t \geq 0 \\ x + t + 3 = 0 \\ 3t = x^2 + 1 \end{array} \right| \quad (***)$$

След заместване на $t = x$ във второто уравнение на (**) достигаем до $x^2 - 3x + 1 = 0$, чиито решения са $x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \geq 0$ или $x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \geq 0$. Така получаваме, че решенията на (**) са

$$\text{са } \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ t_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{array} \right| \quad \text{или} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ t_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{array} \right|$$

Заместваем $t = -3 - x$ във второто уравнение на (***) и свеждаме до $x^2 + 3x + 10 = 0$, което няма реални корени, т.е. системата (***) също няма реални корени.

Сега окончателно получаваме, че решенията на ирационалното уравнение $3\sqrt{3x-1} = x^2 + 1$ (системата (*)) са $x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ или $x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Оценяване. (6 точки) 1 точка за дефиниционното множество. 1 точка за полагането. 1 точка за $x = t$ и $x+t+3 = 0$ и достигане до (**) и (***). 2 точки за намиране на решенията на (**) и (***). 1 точка за окончателен отговор.

Алтернативно: (6 точки) За трансформиране на уравнението в полином от четвърта степен и разлагането му на два квадратни полинома - 4 точки. За решаване на всеки от квадратните полиноми - по 1 точка.

Задача 10.2. Даден е триъгълник ABC и произволна вътрешна точка M такава, че $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MBC$. Точка N е симетрична на M спрямо средата на страната AB . Да се докаже, че сумата $MA \cdot MB + MC \cdot NC$ не зависи от положението на точката M .

Решение. Нека P е симетрична на N спрямо средата на BC , а средите на AB и BC да са съответно C_1 и A_1 . Тогава A_1C_1 е средна отсечка както за $\triangle ABC$, така и за $\triangle MNP$, т.е., $AMPC$ е успоредник, а $\sphericalangle CPM = \sphericalangle CAM = \sphericalangle CBM$ и значи $MBPC$ е вписан. Аналогично, $NBPC$ също е успоредник. От Теоремата на Птоломей и равенствата между съответните елементи в успоредниците, получаваме

$$MB \cdot CP + MC \cdot BP = MP \cdot BC \implies MB \cdot MA + MC \cdot NC = AC \cdot BC,$$

което не зависи от положението на точката M а единствено от дължините на страните AC и BC .

Оценяване. (6 точки) 1 т. за разглеждане на точка P ; по 1 т. за всеки от успоредниците $AMPC$, $NBPC$; 1 т. за $MBPC$ – вписан; 1 т. за теорема на Птоломей и 1т. за довършване.

Задача 10.3. Съществува ли естествено число n , такова че числото $3^n + 1$ да притежава делител от вида $24\ell + 20$?

Решение. Отговор: Не.

Първи начин. Да допуснем противното. Тъй като $24\ell + 20 = 4(6\ell + 5)$, то $4 \mid 3^n + 1$ и значи $n = 2k + 1$ трябва да е нечетно.

Лема (Тук): Нека $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ и $(a, n) = 1$. Тогава съществуват цели $x, y \in \mathbb{Z}$, за които $1 \leq x \leq \sqrt[n]{n}$, $1 \leq |y| \leq \sqrt[n]{n}$ и $ax + y \equiv 0 \pmod{n}$.

Доказателство: Да разгледаме числата от вида $ax + y$, където x, y приемат независимо стойностите $0, 1, \dots, [\sqrt{n}]$. Всички числа от този вид са общо $([\sqrt{n}] + 1)^2 > n$ и значи съществуват x_1, x_2, y_1, y_2 такива, че $ax_1 + y_1 \equiv ax_2 + y_2 \pmod{n}$. Ако $x_1 = x_2$, то $n \mid y_1 - y_2$ и значи $y_1 = y_2$ – противоречие. Аналогично, ако $y_1 = y_2$, то $n \mid a(x_1 - x_2)$ и от $(a, n) = 1$ отново $x_1 = x_2$ – противоречие. Следователно $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Ако $x_1 > x_2$, то $x := x_1 - x_2$ и $y = y_1 - y_2$ изпълняват всички ограничения в лемата.

Да се върнем на задачата. Числото $6\ell + 5$ има прост делител $p = 6r + 5$. Тъй като $(3^k, p) = 1$ от Лемата на Туе следва, че съществуват цели $1 \leq |x|, |y| \leq [\sqrt{p}] < \sqrt{p}$ за които

$$3^k x + y \equiv 0 \pmod{p} \implies 3^{2k} x^2 \equiv y^2 \pmod{p} \implies -x^2 \equiv 3^n x^2 \equiv 3y^2 \pmod{p}.$$

Оттук $p \mid x^2 + 3y^2$. Но $x^2 + 3y^2 < 4p$. Разглеждайки всеки от останалите три случая, получаваме:

- $p = x^2 + 3y^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$. Противоречие с $p = 6r + 5 \equiv 2 \pmod{3}$.
- $2p = x^2 + 3y^2 \equiv 0, 1, 3 \pmod{4}$. Противоречие с $2p = 12r + 10 \equiv 2 \pmod{4}$.
- $3p = x^2 + 3y^2$. Тогава $x = 3x_0$ и отново $p = 3x_0^2 + y^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$. Противоречие.

Второ решение. Понеже 4 дели $24\ell + 20$, то дели и $3^n + 1$ и значи n е нечетно. Така $24\ell + 20$ дели $(3a)^2 + 3$, където $a = 3^{\frac{n-1}{2}}$. Числото $6\ell + 5$ е нечетно и значи има прост делител $p \equiv 5 \pmod{6}$ – остава да обосновем, че не е възможно такъв да дели $k^2 + 3$. Един начин е чрез известния факт, че (-3) не е квадратичен остатък по модул прости числа от този вид (това се проверява лесно и със закона за квадратичната реципрочност, заедно с факта, че (-1) е квадратичен остатък точно когато $p \equiv 1 \pmod{4}$). Друг подход е следният – понеже p е нечетно, можем да считаме, че k е нечетно (иначе работим с $k_0^2 + 3$, където $k_0 = k - p$), съответно при $k = 2z + 1$ следва $4(z^2 + z + 1) \equiv 0 \pmod{p}$, т.е. $z^2 + z + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Оттук непременно $z^3 \equiv 1 \pmod{p}$ и $z^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$. Сега малката теорема на Ферма довежда до $z^2 \equiv 1 \pmod{p}$, откъдето $z \equiv \pm 1 \pmod{p}$, съответно $0 \equiv z^2 + z + 1 \equiv 1, 3 \pmod{p}$, противоречие.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за нечетно n ; 2 т. за $p \mid x^2 + 3y^2$; 2 т. за $x^2 + 3y^2 < 4p$ и 2 т. за довършване. За второто решение: 1 т. за нечетно n , 2 т. за $p \mid k^2 + 3$, 2 т. за използването на факта, че -3 не е квадратичен остатък по модул $p \equiv 5 \pmod{6}$ и 2 т. за доказателство (позволено е да се използва закона за квадратична реципрочност без доказателство).

Задача 10.4. Зоологическите градини в Европа, във всяка от които живеят по точно 100 вида животни, са разделени на две групи $\hat{A}$ и $\hat{B}$ по такъв начин, че всяка двойка зоологически градини (A, B) , $(A \in \hat{A}, B \in \hat{B})$ се грижат за животно от един и същи вид.

Да се докаже, че клетките на животните (всички животни от даден вид живеят в една клетка) могат да бъдат оцветени в 3 цвята, така че във всяка зоологическа градина има поне две разноцветни клетки.

Решение. Ще докажем по-общата задача: Нека $\hat{A}$ и $\hat{B}$ са две фамилии от k -елементни множества, такива, че всяко $a \in \hat{A}$ пресича всяко $b \in \hat{B}$, $k \geq 3$. Тогава елементите на

$\hat{A} \cup \hat{B}$ могат да се оцветят в три цвята без да има едноцветно множество. *Доказателство:* Да разгледаме такава двойка от множества $a \in \hat{A}, b \in \hat{B}$, за която $|a \cup b|$ е минимално. Да изберем произволни елементи $v_a \in a \setminus b$ и $v_b \in b \setminus a$, които да оцветим в цвят 1. Нека оцветим $a \cup b \setminus \{v_a, v_b\}$ в цвят 2 и останалите елементи в цвят 3. Лесно се съобразява, че това оцветяване изпълнява условието на задачата.

Забележка. Задачата е вярна и за неравномошни множества, стига всяко от множествата да е с поне 3 елемента.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за избор на минимална двойка, 2 т. за конструкция и 3 т. за доказателство, че конструкцията работи.