

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

Задача 12.1. Нека $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ и $x^3 + y^3 + z^3 = 3$. Да се намери стойността на израза $A = x^5 + y^5 + z^5$.

Задача 12.2. Във вътрешността на равнобедрен правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза AB е избрана точка M , така че $MA = 5$, $MB = 7$ и $MC = 4\sqrt{2}$. Да се намери големината на ъгъл $\angle AMC$.

Задача 12.3. Редицата a_n е зададена чрез $a_1 \geq 2$ и рекурентната връзка

$$a_{n+1} = a_n \sqrt{\frac{a_n^3 + 2}{2(a_n^3 + 1)}}$$

за $n \geq 1$. Да се докаже, че за всяко естествено число n е в сила неравенството $a_n > \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Задача 12.4. Зоологическите градини в Европа, във всяка от които живеят поне два вида животни, се разделят на две групи $\hat{A}$ и $\hat{B}$ по такъв начин, че всяка двойка зоологически градини (A, B) ($A \in \hat{A}$, $B \in \hat{B}$) се грижат за животно от един и същи вид.

В колко най-малко цвята k могат да бъдат оцветени клетките на животните (всички животни от даден вид живеят в една клетка), така че във всяка зоологическа градина има поне две разноцветни клетки? Да се намери най-голямата стойност на k и всички възможности (зоологически градини и животни), за които тази най-голяма стойност на k се достига.