

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

Велико Търново, 18-20 ноември 2022 г.

София, 2022 г.

Задача 12.1. Нека $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ и $x^3 + y^3 + z^3 = 3$. Да се намери стойността на израза $A = x^5 + y^5 + z^5$.

Решение. Нека x, y, z са корени на полинома от трета степен $P(t) = t^3 + at^2 + bt + c = (t-x)(t-y)(t-z)$. Тогава по формулите на Виет имаме $a = -(x+y+z) = -1$, $b = xy+yz+zx$, $c = -xyz$.

От равенството $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx)$ получаваме $1^2 = 2 + 2b$, т.е. $b = -\frac{1}{2}$.

Нека означим с $S_k = x^k + y^k + z^k$ степенните сборове. Имам $S_0 = 3$, $S_1 = 1$, $S_2 = 2$, $S_3 = 3$. Сега от формулата на Нютон $S_{k+3} + aS_{k+2} + bS_{k+1} + cS_k = 0$ (формулата се получава след умножаване на всяко от равенствата $x^3+ax^2+bx+c=0$, $y^3+ay^2+by+c=0$, $z^3+az^2+bz+c=0$ съответно с x^k , y^k , z^k и почленно им събиране) при $k=0$ имаме $3+(-1)\cdot 2+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1+c\cdot 3=$

0 , т.е. $c = -\frac{1}{6}$. Така последователно получаваме $S_4 = S_3 + \frac{1}{2}S_2 + \frac{1}{6}S_1 = 3 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{25}{6}$,
 $S_5 = S_4 + \frac{1}{2}S_3 + \frac{1}{6}S_2 = \frac{25}{6} + \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{25+9+2}{6} = 6$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за свеждане до полином от трета степен с нули x, y, z ; 2 т. за намиране на коефициентите на полинома; 2 т. за намиране на A .

Задача 12.2. Във вътрешността на равнобедрен правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза AB е избрана точка M , така че $MA = 5$, $MB = 7$ и $MC = 4\sqrt{2}$. Да се намери големината на ъгъл $\sphericalangle AMC$.

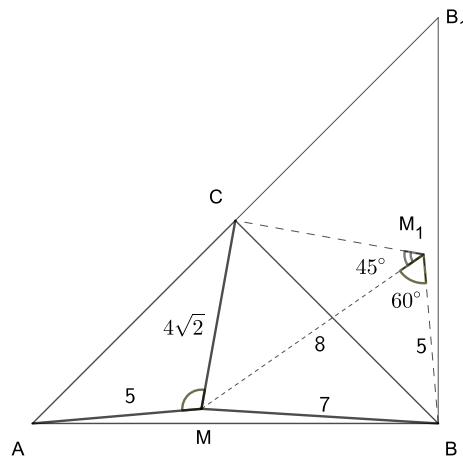
Решение. Нека да разгледаме ротация с център точка C на ъгъл $+90^\circ$. Тогава образите на точките A, B и M при тази ротация ще бъдат съответно $A_1 \equiv B$, B_1 и M_1 . Понеже триъгълникът MM_1C е правоъгълен и равнобедрен, то $MM_1 = \sqrt{2} CM = 8$ и $\sphericalangle AMC = 45^\circ$. Така в триъгълника MM_1B имаме $MB = 7$, $BM_1 = AM = 5$ и $MM_1 = 8$, т.е. от косинусовата теорема получаваме $\sphericalangle MM_1B = 60^\circ$. Сега за търсения ъгъл окончателно получаваме $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BM_1C = \sphericalangle MM_1C + \sphericalangle MM_1B = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$.

Оценяване. (6 точки) 4 т. за построяване на конструкция, в която даденият ъгъл е сума на два известни ъгъла; 2 т. за намиране на ъгъла.

Задача 12.3. Редицата a_n е зададена чрез $a_1 \geq 2$ и рекурентната връзка

$$a_{n+1} = a_n \sqrt{\frac{a_n^3 + 2}{2(a_n^3 + 1)}}$$

за $n \geq 1$. Да се докаже, че за всяко естествено число n е в сила неравенството $a_n > \sqrt{\frac{3}{n}}$.



Решение. Да забележим, че равенството е еквивалентно на

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = \frac{a_n}{a_n^3 + 2}. \quad (*)$$

От СА-СГ следва, че $\frac{a_n}{a_n^3 + 2} \leq \frac{1}{3}$. Така получаваме $\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{1}{3}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, което след сумиране дава $\frac{1}{a_n^2} \leq \frac{n-1}{3} + \frac{1}{a_1^2} < \frac{n}{3}$, откъдето получаваме желанния резултат.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за (*), 1 т. за $\frac{a_n}{a_n^3 + 2} \leq \frac{1}{3}$, 1 т. за $\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{1}{3}$ и 2 т. за довършване.

Задача 12.4. Зоологическите градини в Европа, във всяка от които живеят поне два вида животни, се разделят на две групи $\hat{A}$ и $\hat{B}$ по такъв начин, че всяка двойка зоологически градини (A, B) ($A \in \hat{A}$, $B \in \hat{B}$) се грижат за животно от един и същи вид.

В колко най-малко цвята k могат да бъдат оцветени клетките на животните (всички животни от даден вид живеят в една клетка), така че във всяка зоологическа градина има поне две разноцветни клетки? Да се намери най-голямата стойност на k и всички възможности (зоологически градини и животни), за които тази най-голяма стойност на k се достига.

Решение. Ще разгледаме по-общата задача: Нека $\hat{A}$ и $\hat{B}$ са две фамилии от множества, такива че всяко $a \in \hat{A}$ пресича всяко $b \in \hat{B}$.

Ако съществуват $b_1, b_2 \in \hat{B}$, такива, че, $b_1 \subset b_2$, то е достатъчно да разгледаме $\hat{B} \setminus b_2$ и аналогично за $\hat{A}$. Ако обаче съществуват $b \in \hat{B}$ и $a \in \hat{A}$, такива, че $a \subset b$, то хроматичното число може да бъде произволно голямо. Наистина, нека $\hat{B}$ съдържа само едно множество с n елемента, а $\hat{A}$ съдържа всички двуелементни подмножества на $\hat{B}$. Тогава, очевидно хроматичното число ще е n .

Ако никое множество не съдържа изцяло друго множество, то максималното k , за което можем да оцветим всеки от елементите в един от k цвята така, че да няма едноцветно множество, е 4, и то се достига единствено в следния случай (с точност до размяна на $\hat{A}$ и

$\widehat{B}$): $\widehat{B} = \{b_1, b_2\}$, такава, че $b_1 \cap b_2 = \emptyset$, $\widehat{A}$ е пълният двуделен граф между елементите на b_1 и b_2 (съдържа всички $\{u, v\}$, където $u \in b_1, v \in b_2$). Наистина, за всяко b_1, b_2 ни трябва по два цвята, а от пълнотата на двуделния граф и липсата на едноцветно ребро, тези цветове трябва да са различни, т.е. $k \geq 4$. От друга страна, по какъвто и начин да оцветим в по два различни цвята b_1, b_2 , очевидно няма едноцветно множество нито в $\widehat{A}$, нито в $\widehat{B}$.

Съгласно забележката под задача 10.4, ако няма множество с точно два елемента, то $k \leq 3$. Да означим с H обединението от всички елементи, които се срещат в множество от $\widehat{A}$ или $\widehat{B}$ и нека $E(H)$ е съвкупността от всички множества, всяко от които принадлежи на $\widehat{A}$ или $\widehat{B}$.

Лема Нека $a = \{u, v\} \in \widehat{A}, u \in b \in \widehat{B}$. Тогава, за всяко $w \in b$ или $\{v, w\} \in \widehat{A}$, или $k \leq 3$.

Доказателство: Да допуснем, че $k > 3$. Тогава за всяко $w \in b$ има множество $\{w, v\} \in E(H)$, иначе оцветяваме v, w в цвят 1, елементите на $b \setminus w$ в цвят 2 и всички други в цвят 3, което води до $k \leq 3$ и доказва лемата.

Без ограничение на общността считаме $\{u, v\} \in \widehat{A}$. Без ограничение на общността има множество $b \in \widehat{B}$, което съдържа u . От лемата следва, че $\{v, w\}$ принадлежи на $E(H)$ за всяко $w \in b$. Сега разглеждаме два случая.

Случай 1. Съществува $w \in b$ такава че $\widehat{B}$ съдържа $\{v, w\}$. Тогава от лемата (за $a = \{u, v\}$ и $b = \{v, w\}$) имаме $\{u, w\} \in E(H)$, значи $b = \{u, w\}$. Съответно H съдържа множеството $\{u, v, w\}$, което от своя страна съдържа поне едно множество от $\widehat{A}$ и поне едно множество от $\widehat{B}$ (*).

Ако H съвпада с $\{u, v, w\}$, то очевидно $\chi(H) = 3$. Иначе, H съдържа множество e което не пресича поне едно от $\{u, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}$. Така можем да сменим означенията както следва: $\{u, v, w\} = \{q, r, s\}$, като $e, \{q, r\} \in \widehat{B}$ и $e \cap \{q, r\} = \emptyset$. Отбелязваме, че поне едно от множествата $\{q, s\}, \{r, s\}$ принадлежи на $\widehat{A}$ (без ограничение на общността това е $\{q, s\}$). От лемата (за $a = \{q, s\}$ и $b = e$) $E(H)$ съдържа $\{q, t\}$ за всяко $t \in e$. Ако $\{r, s\} \in \widehat{B}$, то за всяко $t \in e \setminus s$ имаме $\{q, t\} \in \widehat{B}$. Така от лемата (за $a = \{q, s\}$ и $b = \{q, t\}$) имаме множеството $\{s, t\} \in E(H)$, откъдето $e = \{s, t\}$ и H съответства на пълен граф с 4 върха, оттук и $k = 4$. Ако $\{r, s\} \in \widehat{A}$, то отново от лемата (за $a = \{r, s\}$ и $b = e$) има множество $\{r, t\}$ за всяко $t \in e$. Обобщавайки, имаме множествата $\{q, r\}, e \in \widehat{B}, \{q, s\} \in \widehat{A}$ и $\{x, t\} \in E(H)$ за всяко $x \in \{q, r\}$ и $t \in e$. Можем да считаме $|e| > 2$, значи има различни $s, t_1, t_2 \in e$. Отбелязваме, че $\{r, t_1\} \in \widehat{A}$ понеже $\{q, s\} \in \widehat{A}$, така $\{q, t_2\} \in \widehat{A}$. Следователно за всяко $x \in \{q, r\}$ и $t \in e$, $\widehat{A}$ съдържа множеството $\{x, t\}$. Явно всяко множество от съвкупността или пресича едновременно $\{q, r\}$ и e (тогава съвпада с $\{x, t\}$, където $x \in \{q, r\}$ и $t \in e$) или съдържа едно от тях (тогава съвпада с $\{q, r\}$ или e). Също, няма цвят, който се среща едновременно в $\{q, r\}$ и e , значи отново имаме $k = 4$.

Случай 2. Всички множества $\{v, w\}$, където $w \in b$, се съдържат в $\widehat{A}$. Ако $|\widehat{B}| = 1$, то $k > 3$, значи има множество $b' \in \widehat{B}$, което не съдържа u . Да допуснем, че $b \cap b' = \emptyset$. Тогава за всяко $w \in b$ и $t' \in b'$ от лемата (за $a = \{v, w\}$ и b') непременно имаме $\{w, t'\} \in E(H)$. Явно всички тези са в $\widehat{A}$, иначе сме готови от първия случай (ако някое $\{w, t'\} \in \widehat{B}$, то $\{w, v\} \in \widehat{A}, \{w, t'\}, b' \in \widehat{B}$). Значи, H има структурата, описана в началото.

От друга страна, ако $b \cap b' \neq \emptyset$, то от лемата за $a = \{u, v\}$ и b имаме множество $\{v, t\}$ за някое $t \in b \cap b'$. Тогава $b' = \{v, t\}$. Аналогично, $b = \{u, t\}$. Така условието (*) е изпълнено и сме готови.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за случая $a \subset b$, 4 т. за случая, когато никое множество не е подмножество на друго.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.3 – Ивайло Кортезов; 8.2, 8.4 – Мирослав Маринов; 9.1, 9.3 – Милен Иванов; 9.2, 12.1, 12.2 – Веселин Гушев; 9.4, 10.1 – Константин Делчев; 10.2, 10.3 – Александър Иванов; 10.4, 12.4 – Данила Черкашин; 11.1 – Аделина Чопанова; 11.2, 11.3, 11.4 – Емил Колев; 12.3 – Кристиан Василев.