

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

„Акад. Стефан Додунеков“

София – Велико Търново, 18 – 20.11.2022

София, 2022

Решения на темата за 5. клас

1. а) По условие $AB + BC = 595$, $BC + CA = 646$, $CA + AB = 561$. Като съберем трите равенства, получаваме $2(AB + BC + CA) = 1802$, откъдето $AB + BC + CA = 901$. Тогава $AB = 901 - 646 = 255$, $BC = 595 - 255 = 340$, $CA = 646 - 340 = 306$.

б) Числото n е по-голям от 1 делител на 340, 306 и 255. Тъй като $\text{НОД}(340, 306, 255) = 17$, то $n = 17$. Дърветата са $901 : 17 = 53$.

в) Ако номерираме 53-те дървета в посока $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ с номерата 1, 2, 3 и т.н., първия ден градинарят е поставил къщички на всички дървета с кратен на 4 номер. Те са 13 дървета.

На втория ден той е преброил дървото в A , дърво 53, 52, 51 и е поставил къщичка на дърво 50, след това на дърво 45 и т.н. на дърветата с номер, кратен на 5. Тези дървета са 10. От тях той е пропуснал дърветата с номер, кратен на $\text{НОК}(4; 5) = 20$, на които вече има къщичка; това са 2 дървета с номера 20 и 40. Общо къщичките са $13 + 10 - 2 = 21$.

Критерии за оценяване.

а) 2 точки; за намиране на обиколката – 1 т.

б) 2 точки; за намиране на НОД – 1 т.

в) 2 точки.

2. Нека числото е $M = \overline{abcd}$. От условието, че $\overline{dbca}$ и $\overline{bacd}$ са четирицифрени числа следва, че цифрите d и b не са равни на 0.

От $5|\overline{dbca}$ следва, че $a = 5$ (като първа цифра, a не е 0).

От $4|\overline{5cbd}$ следва, че $4|\overline{bd}$. (1)

От $9|\overline{5bcd}$ следва, че $9|5 + b + c + d$. Но $5 + b + c + d$ не надхвърля 32, следователно $5 + b + c + d = 9, 18$ или 27 . (2)

От $11|\overline{b5cd}$ следва, че 11 дели разликата на $b + c$ и $5 + d$. Тъй като $b + c - (5 + d)$ е най-много $2 \cdot 9 - (5 + 1) = 12$, а $5 + d - (b + c)$ е най-много $5 + 9 - (1 + 0) = 13$, то разликата на $b + c$ и $5 + d$ е 0 или 11.

Ако разликата на $b + c$ и $5 + d$ е 11, сборът на четирите цифри е нечетен и по-голям от 11; от (2) следва, че този сбор е 27. Тогава $b + c$ и $5 + d$ (в някакъв ред) са $(27 - 11) : 2 = 8$ и $(27 + 11) : 2 = 19$, но последното равенство е невъзможно.

Следователно $b + c = 5 + d$, сборът на четирите цифри е четен и от (2) следва, че този сбор е 18, т.е. $b + c = d + 5 = 9$. Тогава $d = 4$ и от (1) $b = 2, 4, 6$ или 8 .

При $b = 2$ получаваме $c = 7$ и $M = 5274$.

При $b = 4$ получаваме $c = 5$ и $M = 5454$.

При $b = 6$ получаваме $c = 3$ и $M = 5634$.

При $b = 8$ получаваме $c = 1$ и $M = 5814$.

б) От четирите получени възможности за M ще потърсим числото, което може да се представи като произведение на три последователни естествени числа.

Имаме $5274 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 293$, $5454 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 101$ и $5634 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 313$; и в трите има прост делител, който е твърде голям, за да е изпълнено условието. Остава $5814 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 = 17 \cdot 18 \cdot 19$. Търсеният сбор е $17 + 18 + 19 = 54$.

Критерии за оценяване. а) 4 точки; б) за разлагане на множители 1 т.; за вярно намерен отговор (независимо по какъв начин) 2 точки.

3. а) Сборът на числата на всяка табела е 999. Късметлийските табели са от следните видове:

- $\overline{aaa}, \overline{bbb}$, където $a + b = 9$ и a е от 1 до 8; общо 8 табели;
- $\overline{aab}, \overline{bba}$, където $a + b = 9$ и a е от 0 до 9; общо 10 табели;
- $\overline{aba}, \overline{bab}$, където $a + b = 9$ и a е от 0 до 9; общо 10 табели;
- $\overline{baa}, \overline{abb}$, където $a + b = 9$ и a е от 0 до 9; общо 10 табели.

(В това броене при $a = 0$ или $b = 0$ получаваме двойките 009 и 990; 090 и 909; 099 и 900, които съответстват на табелите (9, 990); (90, 909); (99, 900).)

Получихме, че късметлийските табели са $8 + 3 \cdot 10 = 38$.

б) Търсим числа a и b , за които $a + b = 999$ и $\text{НОК}(a; b) = 7800 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13$.

Тъй като сборът на числата е нечетен, едното от тях е четно, а другото е нечетно; нека a е четно. В разлагането на a участва 2^3 .

В $\text{НОК}(a; b)$ участва множител 3 и сборът на числата се дели на 3; следователно в разлагането и на двете числа има множител 3.

В $\text{НОК}(a; b)$ участва 5^2 , а сборът на числата не се дели на 5; следователно в разлагането на точно едно от числата участва 5^2 . По същия начин е ясно, че в разлагането на точно едно от числата има множител 13.

Като вземем предвид, че $a < 999$, възможните случаи са:

$a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600$, $b = 3 \cdot 13 = 39$, но сборът не е 999;

$a = 2^3 \cdot 3 \cdot 13 = 312$, $b = 3 \cdot 5^2 = 75$, но сборът не е 999;

$a = 2^3 \cdot 3 = 24$, $b = 3 \cdot 5^2 \cdot 13 = 975$, сборът е 999.

Специалната табела е на 24 км от A .

Критерии за оценяване. а) 4 точки; б) 3 точки.

4. а) Възможните разстояния между две карти са от 0 до 7; общо 8. Ще докажем, че винаги поне едно от тези осем разстояния не се среща.

Да допуснем, че се срещат и осемте разстояния. Разстояние 7 може да се появи само между първата и последната карта в редицата, така че първата и последната карта са с една и съща буква; нека е A . Разстоянието 6 може да се появи само между първата и осмата карта или между втората и деветата. Тъй като първата и деветата са с A , то втората или осмата също е A . Тогава картите са $AXXXXXAA$ или $AAXXXXXXA$, където X е B или C . Но и в двата случая няма как да се появи разстояние 5, защото разстоянията между картите с A са 0, 6 и 7, а между картите с B или C не са повече от 4.

Следователно винаги поне едно от разстоянията от 0 до 7 не се реализира. Броят на различните разстояния е най-много 7.

Пример за редица, в която се срещат 7 различни разстояния, е

A	B	B	C	A	C	C	B	A
---	---	---	---	---	---	---	---	---

б) Възможните разстояния между две карти са от 0 до 10; общо 11. Два примера, в които те се реализират, са следните:

A	A	C	B	C	B	C	B	C	A	B	A
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

и

A	A	C	B	B	C	B	C	C	A	B	A
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Критерии за оценяване. а) 5 точки; за оценка – 3 т., за пример 2 т. б) 2 точки за посочен верен пример.