

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

„Акад. Стефан Додунеков“

София – Велико Търново, 18 – 20.11.2022

София, 2022

Решения на темата за 6. клас

1. Дължината на отсечка с краища в числата a и b е $b - a$. Средата на отсечката е в точката $a + \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(a + b)$. Забелязваме, че $(2a - b) + (2b - a) = a + b$, което означава, че сборът на числата от двете граници се запазва. Следователно средата на отсечката с краища в двете мравки не се променя.

а) Намираме

$$\begin{aligned} a &= -39 \frac{3}{13} \cdot \left(23 \frac{11}{28} - 20 \frac{9}{14} \right) + 3 \frac{3}{13} \cdot \frac{11}{4} = \\ &= -39 \frac{3}{13} \cdot 2 \frac{3}{4} + 3 \frac{3}{13} \cdot \frac{11}{4} = \left(-39 \frac{3}{13} + 3 \frac{3}{13} \right) \cdot \frac{11}{4} = -36 \cdot \frac{11}{4} = -99. \end{aligned}$$

Делимото в b е равно на $1 : \left(20 + 1 : \frac{11}{10} \right) = 1 : 20 \frac{10}{11} = \frac{11}{230}$.

Като използваме равенството $\frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$, намираме

$$\frac{1}{9.11} + \frac{1}{11.13} + \dots + \frac{1}{43.45} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{45} \right) = \frac{2}{45}$$

и

$$\frac{1}{10.12} + \frac{1}{12.14} + \dots + \frac{1}{44.46} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{46} \right) = \frac{9}{230}.$$

Тогава

$$b = \frac{11}{230} : \left(\frac{2}{45} - \frac{9}{230} \right) = \frac{11}{230} : \frac{11}{230.9} = 9.$$

Средата на отсечката е в точката $\frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2} \cdot (-99 + 9) = -45$.

б) Имаме $\frac{1}{2}(a + b) = -2022$, т.е. $a + b = -4044$.

Тъй като $(2b - a) - (2a - b) = 3(b - a)$, всеки следващ ден дължината на отсечката се утроява. Следователно на петия ден тя е $3^4 \cdot (b - a) = 2025$ и $b - a = 25$.

Намираме $2b = (a + b) + (b - a) = -4019$ и $b = -2009,5$, както и $2a = (a + b) - (b - a) = -4069$ и $a = -2034,5$.

Критерии за оценяване.

а) 3 точки (за намиране на a и на b по 1 точка; за намиране на средата – 1 точка); б) 3 точки; (за доказване, че дължината на интервала се утроява всеки ден – 1 т.; за доказване, че средата се запазва – 1 т.; за намиране на a и b – 1 точка)

2. а) Разсъждаваме отзад напред: 180 диаманта са 45% от общия брой на диамантите и аметистите, следователно диамантите и аметистите са общо $180 : 0,45 = 400$; $400 + 4 =$

404 камъни са 40% от общия брой рубини, аметисти и диаманти, следователно рубините, аметистите и диамантите общо са $404 : 0,4 = 1010$. Половината от всички камъни са $1010 + 1 = 1011$, следователно в съкровището има 2022 камъни.

б) Броят камъни на Крор е $124\% = \frac{31}{25}$ от броя камъни на Фрор. Тъй като броят на камъните е естествено число, то броят на камъните на Фрор се дели на 25, т.е. е от вида $25x$, където x е естествено число. Тогава Крор има $31x$ камъни, а Дрор има $75\% \cdot (25x + 31x) = 42x$ камъни. Общо трите джуджета имат $25x + 31x + 42x = 98x$ камъни. Тъй като $2022 : 98 = 20$ (ост. 62), то Билбо е взел най-малко 62 скъпоценни камъни.

Критерии за оценяване.

а) 3 точки; за оценка – 3 т., б) 3 точки; включително ако задачата е решена вярно при друг общ брой на камъните.

3. В триъгълник AMC отсечката CB е медиана. Следователно $S_{ABC} = S_{MBC} = \frac{1}{2}S_{AMC}$.

В триъгълник BMN отсечката MC е медиана. Следователно $S_{BMC} = S_{NMC} = \frac{1}{2}S_{BMN}$.

Следователно $S_{ABC} = S_{MBC} = S_{NMC}$ и

$$2S_{ABC} = S_{MBC} + S_{NMC} = S_{BMN}.$$

Аналогично $2S_{BCD} = S_{CNP}$, $2S_{CDA} = S_{DPQ}$, $2S_{DAB} = S_{AQM}$. Събираме равенствата и получаваме

$$2(S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{DAB}) = S_{BMN} + S_{CNP} + S_{DPQ} + S_{AQM},$$

$$4S_{ABCD} = S_{BMN} + S_{CNP} + S_{DPQ} + S_{AQM}.$$

От тук следва, че $5S_{ABCD} = S_{MNPQ}$. Следователно $S_{ABCD} = 50 \text{ cm}^2$.

б) Да означим $S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$, $S_{DOA} = S_4$. Тогава $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_{ABCD} = 50$.

Триъгълниците AOB и AOC имат обща височина h_b през върха B . За лицата им е вярно $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}AO \cdot h_b}{\frac{1}{2}OC \cdot h_b} = \frac{AO}{OC}$. Аналогично $\frac{S_4}{S_3} = \frac{AO}{OC}$. Следователно $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$ или $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

Тъй като S_1 , S_2 , S_3 и S_4 са прости числа, а съществува единствено разлагане на прости множители на числото $S_1 \cdot S_3$, то $S_1 = S_2 = p$ и $S_3 = S_4 = q$ или $S_1 = S_4 = p$ и $S_3 = S_2 = q$, където p и q са прости числа. Заместваме в равенството $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 50$ и получаваме, че $p + q = 25$. Това означава, че p и q са от различна четност и тъй като p и q са прости числа, то едното от тях е задължително 2, а за другото остава 23. Като обобщим резултатите се получават 4 възможни решения:

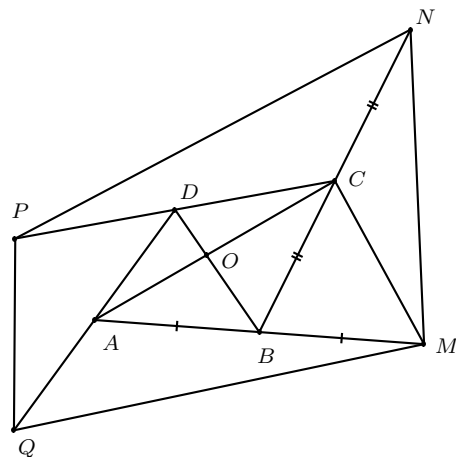
$$S_{AOB} = 2, S_{BOC} = 2, S_{COD} = 23, S_{DOA} = 23;$$

$$S_{AOB} = 2, S_{BOC} = 23, S_{COD} = 23, S_{DOA} = 2;$$

$$S_{AOB} = 23, S_{BOC} = 2, S_{COD} = 2, S_{DOA} = 23;$$

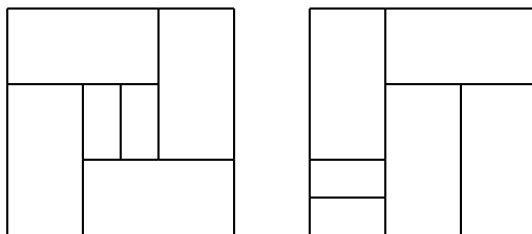
$$S_{AOB} = 23, S_{BOC} = 23, S_{COD} = 2, S_{DOA} = 2.$$

Критерии за оценяване.

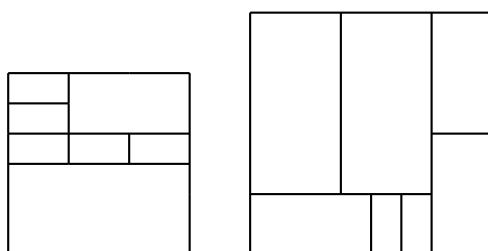


а) 4 точки; б) 3 точки.

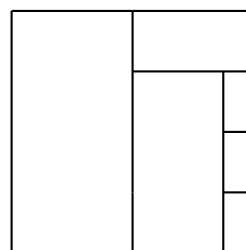
4. а) На чертежа са показани два примера за разрязване на шест домина



и два примера за разрязване на седем домина.



б) На чертежа е показано как квадрат 8×8 може да се разреже на едно домино 4×8 , едно домино 3×6 , едно домино 2×4 и три домина 1×2 .



б) В условието е показано как квадрат може да се разреже на 5 домина, а в а) е показано как квадрат може да се разреже на 6 или 7 домина.

Остава да забележим, че всяко домино може да се разреже на 4 домина. С такова разрязване броят на домината се увеличава с 3.



Следователно от примера с 5 домина след k разрязвания се получава разрязване на $5 + 3k$ домина; от примера с 6 домина след k разрязвания се получава разрязване на $6 + 3k$ домина; от примера със 7 домина след k разрязвания се получава разрязване на $7 + 3k$ домина. Всяко естествено $n \geq 8$ попада в един от тези случаи.

Критерии за оценяване.

а) 2 точки; (по две за пример); б) 2 точки; в) 3 точки.