

Тема за 7. клас

Задача 1. Възрастта на Борис сега е два пъти по-голяма от възрастта на Асен, когато Борис беше на толкова години, на колкото е Асен в момента. Когато Асен стане на сегашната възраст на Борис, тогава сборът на годините им ще бъде 45. На колко години е Асен сега?

Задача 2. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$.

а) Триъгълниците ABC , ABD и ACD са остроъгълни и лицето на четириъгълника $ABCD$ е равно на 324 cm^2 . Ако M , N , P , Q , E , F са средите съответно на отсечките AB , BC , CD , DA , AC , BD , намерете

$$S_{MFQE} + S_{FNCP}.$$

(Четириъгълникът $MFQE$ е вдлъбнат, а $FNCP$ е изпъкнал.)

б) Правите AB и CD са успоредни и диагоналите AC и BD се пресичат в точка O . Докажете, че

$$S_{ABCD}^2 + 2.S_{BOC}^2 = S_{AOB}^2 + S_{COD}^2 + 4.S_{ABCD}.S_{AOD}.$$

Задача 3. Най-много колко полета могат да се изберат върху шахматна дъска (8×8) така, че от всяко избрано поле с един или два хода на коня да се стига до всяко от останалите избрани полета?

(За един ход конят се придвижва на две полета вертикално и след това едно хоризонтално, или на две полета хоризонтално и след това едно вертикално.)

Задача 4. а) Докажете, че ако x и y са естествени числа и стойността на израза

$$M = \frac{x^4 + y^4 - x^2y^2}{(x+y)^2}$$

е цяло число, то стойностите на изразите $\frac{xy}{x+y}$, $\frac{x^2}{x+y}$ и $\frac{y^2}{x+y}$ са естествени числа.

б) Намерете двойките естествени числа $(x; y)$, за които $x \leq y$, стойността на израза $\frac{xy}{x+y}$ е естествено число и $x+y \leq 50$.