

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

„Акад. Стефан Додунеков“

София – Велико Търново, 18 – 20.11.2022

София, 2022

Решения на темата за 7. клас

1. Нека сега Асен е на x години, а Борис сега е на y години. ($0 < x < y$)

Възраст на	Преди	Сега	След
Асен	$x - (y - x)$	x	y
Борис	x	y	$y + y - x$

Имаме

$$2(x - (y - x)) = y \iff 2(x - y + x) = y \iff 2(2x - y) = y \iff 4x - 2y = y \iff 4x = 3y$$

$$y + y + y - x = 45 \iff 3y - x = 45.$$

От $3y - x = 45$ и $4x = 3y$ следва, че $4x - x = 45$, $3x = 45$ и $x = 15$. Следователно $y = 20$. Сега Асен е на 15 години.

Критерии за оценяване.

1 т. за въведени неизвестни букви и ($0 < x < y$);

1 т. за изразяване възрастта на Асен и Борис чрез въведените букви: преди, сега и след;

2 т. за съставяне на равенствата 2. $[x - (y - x)] = y$ и $y + y + y - x = 45$;

1 т. за намиране на x и y ;

1 т. за отговор.

2. Ще докажем следните помощни твърдения.

1. Ако ABC е произволен триъгълник и M и N са точки съответно върху страните AB и AC , то

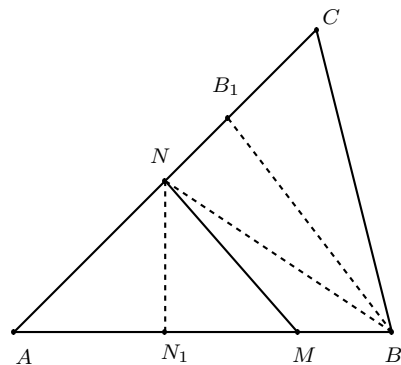
$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}.$$

Доказателство. Разглеждаме ABN . Имаме

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABN}} = \frac{2S_{AMN}}{2S_{ABN}} = \frac{AM \cdot NN_1}{AB \cdot NN_1} = \frac{AM}{AB}$$

и

$$\frac{S_{ABN}}{S_{ABC}} = \frac{2S_{ABN}}{2S_{ABC}} = \frac{AN \cdot BB_1}{AC \cdot BB_1} = \frac{AN}{AC}.$$



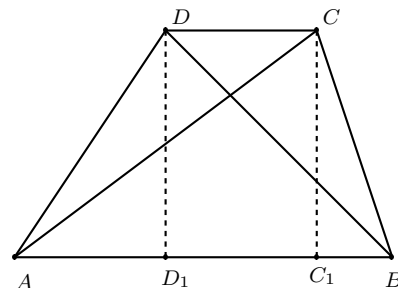
Следователно

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABN}} \cdot \frac{S_{ABN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \iff \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}.$$

2. Ако правите AB и CD са успоредни, то $S_{ABC} = S_{ABD}$.

Доказателство. Тъй като AB и CD са успоредни, то $CC_1 = DD_1$ и

$$2S_{ABC} = AB \cdot CC_1 = AB \cdot DD_1 = 2S_{ABD}.$$



а) От условието, че триъгълниците ABC , ABD и ACD са остроъгълни следва, че четириъгълниците $AMEQ$, $BNFM$ и $DQFP$ нямат общи вътрешни точки. Следователно

$$S_{MFQE} + S_{FNCP} + S_{AMEQ} + S_{BNFM} + S_{DQFP} = S_{ABCD}.$$

Четириъгълниците $AMEQ$, $BNFM$ и $DQFP$ имат равни лица.

$$S_{AMEQ} = S_{AME} + S_{AEQ} = \frac{1}{4}S_{ABC} + \frac{1}{4}S_{ACD} = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Аналогично се доказва, че $S_{BNFM} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$ и $S_{DQFP} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Следователно

$$S_{MFQE} + S_{FNCP} = S_{ABCD} - \frac{3}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = 81.$$

б) Ще докажем, че $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{DOA}$.

Твърдението следва от

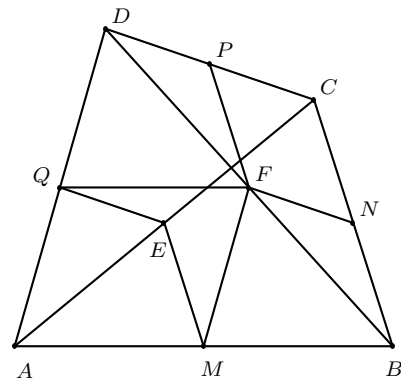
$$\frac{S_{COD}}{S_{DOA}} = \frac{\frac{1}{2}CO \cdot h_D}{\frac{1}{2}AO \cdot h_D} = \frac{CO}{AO} = \frac{\frac{1}{2}CO \cdot h_B}{\frac{1}{2}AO \cdot h_B} = \frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}.$$

От $AB \parallel CD$ следва, че $S_{ABD} = S_{ABC}$, следователно $S_{ABO} + S_{AOD} = S_{ABO} + S_{BOC}$, т.е. $S_{AOD} = S_{BOC}$.

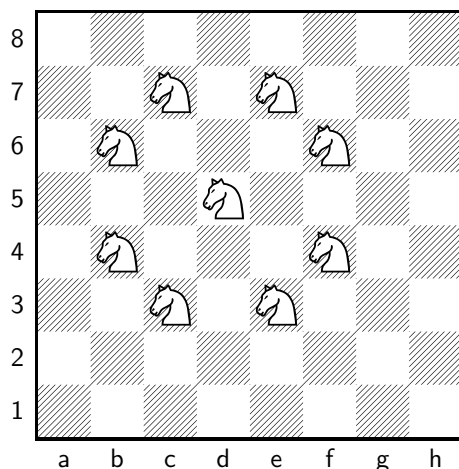
От $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{COD} + S_{BOC} + S_{AOD} = S_{AOB} + S_{COD} + 2 \cdot S_{BOC}$ следва, че

$$\begin{aligned} S_{ABCD}^2 + 2 \cdot S_{BOC}^2 &= (S_{AOB} + S_{COD} + 2 \cdot S_{BOC})^2 + 2 \cdot S_{BOC}^2 = \\ &= S_{AOB}^2 + S_{COD}^2 + 4 \cdot S_{BOC}^2 + 2 \cdot S_{AOB} \cdot S_{COD} + 4 \cdot S_{AOB} \cdot S_{BOC} + 4 \cdot S_{COD} \cdot S_{BOC} + 2 \cdot S_{BOC}^2 = \\ &= S_{AOB}^2 + S_{COD}^2 + 4 \cdot S_{BOC}^2 + 2 \cdot S_{BOC}^2 + 4 \cdot S_{AOB} \cdot S_{BOC} + 4 \cdot S_{COD} \cdot S_{BOC} + 2 \cdot S_{BOC}^2 = \\ &= S_{AOB}^2 + S_{COD}^2 + 8 \cdot S_{BOC}^2 + 4 \cdot S_{AOB} \cdot S_{BOC} + 4 \cdot S_{COD} \cdot S_{BOC} = \\ &= S_{AOB}^2 + S_{COD}^2 + 4(2S_{BOC}^2 + S_{AOB} \cdot S_{BOC} + S_{COD} \cdot S_{BOC}) = \\ &= S_{AOB}^2 + S_{COD}^2 + 4(2S_{BOC} + S_{AOB} + S_{COD}) \cdot S_{BOC} = S_{AOB}^2 + S_{COD}^2 + 4S_{ABCD} \cdot S_{AOD}. \end{aligned}$$

Критерии за оценяване: а) 3 точки; б) 3 точки. (1 т. за $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{DOA}$ и $S_{AOD} = S_{BOC}$ и 2 т. за доказване на $S_{ABCD}^2 + 2 \cdot S_{BOC}^2 = S_{AOB}^2 + S_{COD}^2 + 4 \cdot S_{ABCD} \cdot S_{AOD}$.)



3. Ако е поставен кон в поле D5, след 1-ви ход той може да бъде в полетата B4, B6, C3, C7, E3, E7, F4 и F6.



Заедно с поле D5 имаме 9 полета. Тези 9 полета отговарят на условието, че между всеки две от тях може да се стигне с един или два хода на коня. Тези полета се намират в квадрат 5×5 .

Да разгледаме най-лявото от отбелязаните полета (X) и вертикалната ивица, която включва пет стълба, най-левият от които е този на X. Тази ивица съдържа всички отбелязани полета, тъй като не може да бъде напусната с два хода на коня, ако се тръгне от X. По същия начин, ако разгледаме най-горното от отбелязаните полета (Y) и хоризонталната ивица, която включва пет реда, най-горният от които е редът на Y, тя съдържа всички отбелязани полета. Следователно всички отбелязани полета са в квадрата 5×5 , който се получава при пресичането на двете ивици.

Ще покажем, че във всеки квадрат 5×5 не съществуват 10 полета, които отговарят на условието. Нека преномерираме полетата на квадрата с числата 1,2,3,...,10, както е показано на рисунката.

2	2	4	7	1
3	5	10	6	8
4	7	1	9	3
6	6	8	5	5
1	9	3	4	2

С числата от 1 до 6 са номерирани по 3 полета, с числата 7, 8 и 9 по 2 полета и с числото 10 едно поле. Забелязваме, че ако две полета са номерирани с едно и също число, то трябва да направим поне 3 хода с коня, за да отидем от едното поле в другото. Следователно при избор на 10 полета е необходимо те да са номерирани с различни числа. Полето с номер 10 ще е едно от избраните полета. Нека всяко от оцветените полета с номера 7, 8 и 9 е в избраните 10 полета. (Ако изберем вторите полета с номера 7, 8 и 9, разсъжденията са аналогични.) От останалите полета с номера от 1 до 6 се установява, че при всеки избор на едно от трите полета с един и същи номер, съществува поле от оцветените, до което се стига с три или

повече хода на коня. Например ако от поле с номер 1 се стига с един ход до полета с номера 9 или 10, то от това поле до полетата с номера 7 или 8 се стига след 3 хода. Ако от поле с номер 1 се стига с един ход до полета с номера 7 или 8, то от това поле до полетата с номера 9 или 10 се стига след 3 хода. Аналогично с другите избори.

По този начин доказваме, че във всеки квадрат 5×5 от шахматната дъска не съществуват 10 полета, които да отговарят на условието. Следователно търсената най-голяма стойност е равна на 9.

Критерии за оценяване.

- 1 т. за посочване на 9 полета, които отговарят на условието;
- 1 т. за разглеждане на квадрат 5×5 с 9 полета, които отговарят на условието;
- 3 т. за преномериране полетата на квадрата 5×5 ;
- 2 т. за доказване, че не съществуват 10 полета.

4. а) Преобразуваме числителя на M по следния начин:

$$x^4 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 3x^2y^2 = (x + y)^4 - 4xy(x + y)^2 + x^2y^2.$$

Следователно $\left(\frac{xy}{x + y}\right)^2$ е естествено число и $\frac{xy}{x + y}$ също е естествено число. От равенството

$$xy = x(x + y) - x^2 = y(x + y) - y^2 \text{ получаваме, че } \frac{x^2}{x + y} \text{ и } \frac{y^2}{x + y} \text{ са естествени числа.}$$

б) Нека $x = y$. Ако $\frac{xy}{x + y}$ е естествено число, то $\frac{xy}{x + y} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$, т.е. x трябва да е четно число. Наистина, при $x = y = 2t$, $t \in \mathbb{N}$ имаме $\frac{xy}{x + y} = \frac{4t^2}{4t} = t \in \mathbb{N}$.

Освен това, $2 \leq x + y = 4t \leq 50$, т.е. $1 \leq t \leq 12$, което означава, че в този случай решенията са 12.

Нека $x + y$ дели xy , $x < y$ и $\text{НОД}(x; y) = d$. Следователно $x = dx_1$, $y = dy_1$, $\text{НОД}(x_1, y_1) = 1$ и $x_1 < y_1$. От доказателството на а) следва, че $x + y/x^2 \iff d(x_1 + y_1)/d^2x_1^2 \iff x_1 + y_1/dx_1^2$. Аналогично и $x_1 + y_1/dy_1^2$. Ако p е просто число, което дели $x_1 + y_1$, но не дели d , то p/x_1 и следователно p/y_1 , а това е невъзможно. Остава p да е делител на d . Щом като всеки прост делител на $x_1 + y_1$ е делител на d ще считаме, че $d = (x_1 + y_1)m$, $m \in \mathbb{N}$. Наистина, тогава $\frac{xy}{x + y} = \frac{dx_1y_1}{x_1 + y_1} = mx_1y_1 \in \mathbb{N}$. Освен това, от $x + y = d(x_1 + y_1) = m(x_1 + y_1)^2 \leq 50$ следва, че $3 \leq x_1 + y_1 \leq 7$. Разглеждаме тези случаи поотделно.

$x_1 + y_1$	x_1	y_1	m	Брой двойки $(x; y)$
3	1	2	1, 2, 3, 4, 5	5
4	1	3	1, 2, 3	3
5	1	4	1, 2	2
5	2	3	1, 2	2
6	1	5	1	1
7	1	6	1	1
7	2	5	1	1
7	3	4	1	1

В този случай получаваме общо 16 двойки.

Окончателно, отговорът е $12 + 16 = 28$ двойки.

(Двойките с различни x и y са: (3, 6), (4, 12), (6, 12), (5, 20), (6, 30), (7, 42), (8, 24), (9, 18), (10, 15), (10, 40), (12, 24), (12, 36), (14, 35), (15, 30), (20, 30), (21, 28).)

Критерии за оценяване. а) 3 т. б) 4 т.