

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

Велико Търново, 18-20 ноември 2022 г.

София, 2022 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Решете уравнението

$$4x^2 + |9 - 6x| = |10x - 15| + 6(2x + 1).$$

Отговор. $x = 4$, $x = -1$.

Решение. Първи метод. Преобразуваме еквивалентно:

$$4x^2 - 6(2x + 1) = 5|2x - 3| - 3|3 - 2x|$$

$$2x^2 - 6x - 3 = |2x - 3|.$$

Понеже $|a|$ е винаги a или $(-a)$, то решенията изпълняват $2x^2 - 6x - 3 = 2x - 3$ или $2x^2 - 6x - 3 = 3 - 2x$. В първия случай следва $2x(x - 4) = 0$, т.е. $x = 0$ или $x = 4$, а във втория случай $2(x - 3)(x + 1) = 0$, т.е. $x = 3$ или $x = -1$. Обаче $x = 0$ и $x = 3$ дават в началното уравнение $-3 = 3$, което е невярно, докато $x = -1$ и $x = 4$ наистина са решения (и двете страни са равни на 5).

Втори метод. Преобразуваме еквивалентно до

$$4x^2 - 12x - 6 = 2|2x - 3|.$$

Полагаме $u = |2x - 3| \geq 0$; тогава $u^2 = 4x^2 - 12x + 9$ и уравнението добива вида $u^2 - 15 = 2u$, което води до $(u - 5)(u + 3) = 0$. Вторият множител е положителен, така че трябва $u = 5$. Съответно $2x - 3 = 5$ води до $x = 4$, а $2x - 3 = -5$ води до $x = -1$.

Оценяване. (6 точки) 4 т. за намиране на 4, (-1) и още най-много две други x , 2 т. за отхвърляне на излишните стойности.

Задача 8.2. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с прав ъгъл при върха C и лице S . Нека S_1 е лицето на кръга с диаметър AB и $k = \frac{S_1}{S}$.

а) Да се намерят острите ъгли на ABC , ако $k = 2\pi$.

б) Да се докаже, че не съществува ABC , за който $k = 3$.

Решение. Ако $AB = c$ и h е височината към AB , то $S = \frac{ch}{2}$, $S_1 = \frac{\pi c^2}{4}$ и $k = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c}{h}$. Нека $m = \frac{c}{2}$ е дължината на медианата към хипотенузата.

а) При $k = 2\pi$ следват $c = 4h$ и $m = 2h$. От правоъгълния триъгълник с хипотенуза m и катет h следва, че ъгълът между медианата и хипотенузата е 30° , следователно острите ъгли на ABC са 15° и 75° .

б) От правоъгълния триъгълник с хипотенуза m и катет h имаме $m \geq h$. Така $\frac{c}{h} \geq 2$ и значи $k \geq \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi > 3$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за а), от които 1 т. за $c = 4h$ и 1 т. за довършване (не се отнемат точки, ако свойството на правоъгълен триъгълник с ъгъл 15° се цитира като известен факт); 4 т. за б), от които: 1 т. за изразяване на k чрез c и h , 1 т. за въвеждането на m , 1 т.

за $m \geq h$ и 1 т. за довършване; алтернативно: 1 т. за изразяване на k чрез катетите a и b на ABC , 1 т. за твърдението $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$ и 1 т. за доказателство, 1 т. за довършване.

Задача 8.3. По окръжност са разположени в този ред точките $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_9, B_9$. Всяка от отсечките $A_i B_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, 9$) трябва да се оцвети в един от k дадени цвята, така че никои две едноцветни отсечки не се пресичат във вътрешна точка и за всяко $i = 1, \dots, 9$ има цвят, за който в този цвят няма отсечки с край A_i , нито с край B_i . Намерете най-малкото възможно k .

Отговор. 9

Решение. Отсечките $A_1 B_5, A_2 B_6, A_3 B_7, A_4 B_8, A_5 B_9, A_6 B_1, A_7 B_2, A_8 B_3$ и $A_9 B_4$ се пресичат във вътрешни точки, така че са необходими поне 9 цвята. Толкова са и достатъчни: може в цвят i да са отсечката $A_{i+1} B_i$ (навсякъде при $i = 9$ пишем 1 вместо $i + 1$) и всички отсечки с край A_i освен $A_i B_{i-1}$ (при $i = 1$ пишем 9 вместо $i - 1$). По този начин никоя от отсечките с край A_i и/или B_i не е в цвят $i + 1$.

Забележка. Дадената задача е формализация на следната постановка: на кръстовище излизат 9 двупосочни улици с дясно движение; всяка улица се пресича от пешеходна пътека точно до кръстовището. Има светофарна уредба, осигуряваща зелен сигнал за преминаване от всяка улица по най-краткия път към всяка улица, включително обратен завой към самата нея, както и за преминаване по всяка пешеходна пътека. Такт наричаме период от време, за който множество от зелени сигнали за автомобили и/или пешеходци не се променя и маршрутите им не се пресичат. Намерете най-малкия възможен брой тактове (всяко платно може да бъде разделено на достатъчен брой ленти за автомобилите отиващи/идващи към/от различни улици).

Забележка. По подобен начин (с лека модификация на доказателството на оценката при четно n) можем да докажем, че отговорът в горната задача в случая на n улици ($n \geq 3$) е n .

Оценяване. (7 точки) 3 т. за доказателство, че са необходими поне 9 цвята, 4 т. за работеща схема с 9 цвята.

Задача 8.4. Да се намери броя на редиците от 2022 естествени числа, такива че във всяка редица:

- всяко число след първото е по-голямо или равно на предходното,
- поне едно от числата е равно на 2022 и
- сумата на всеки 2020 от числата се дели на всяко от останалите две.

Отговор. 13

Решение. Нека сумата на числата е S и a, b и c са кои да е три от тях. Явно $S - a - b$ и $S - a - c$ се делят на a , откъдето a дели $b - c$. Сега ако изберем a да е число с най-голяма стойност измежду всички, неравенството $a \leq |b - c|$ няма как да бъде изпълнено и така горната делимост дава непременно $b = c$. Следователно всяка от търсените 2022-орки непременно има вида $(n, n, \dots, n, a)$. Вече исканото е еквивалентно на делимостите $a \mid 2020n$ и $n \mid 2019n + a$, т.е. $n \mid a \mid 2020n$ – значи търсените са от вида $(n, n, \dots, n, kn)$ където k е делител на 2020 и поне едно от n и kn е равно на 2022.

Ако $n = 2022$, то понеже $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ има $(2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 12$ делителя, имаме 12 възможности.

Ако $kn = 2022$ и $n \neq 2022$, то $k > 1$ дели 2020 и 2022, значи дели 2, т.е. единствената възможност е $k = 2$ и $n = 1011$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за верен отговор; 2 т. за $a \mid b - c$ за произволни a, b, c ; 1 т. за разглеждане на максимален елемент; 1 т. за свеждането до вида $(n, n, \dots, n, kn)$ за $k \mid 2020$; по 1 т. за $n = 2022$ и $kn = 2022$.