

## Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 17-19 ноември 2023 г.

**Задача 10.1.** Да се реши уравнението

$$(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+x\sqrt{x^2+1}=0.$$

**Задача 10.2.** Даден е остроъгълен триъгълник  $ABC$  с център  $O$  на описаната окръжност. Точка  $P$  е върху страната  $BC$ , такава че  $BP < \frac{1}{2}BC$ . Точка  $Q$  е от страната  $BC$  такава, че  $CQ = BP$ . Правата  $AO$  пресича  $BC$  в точка  $D$ , а точка  $N$  е среда на  $AP$ . Описаната около триъгълник  $ODQ$  окръжност пресича за втори път описаната около триъгълник  $BCO$  окръжност в точка  $E$ . Правите  $NO$  и  $OE$  пресичат  $BC$  съответно в точки  $K$  и  $F$ . Да се докаже, че точките  $A, O, K, F$  лежат на една окръжност.

**Задача 10.3.** Да се намерят всички естествени числа  $k$  със следното свойство: Съществува полином  $f(x)$  с рационални коефициенти, такъв че за всяко естествено число  $n > 2023^{2023}$

$$f(n) = \text{НОК}(n+1, n+2, \dots, n+k).$$

**Задача 10.4.** Във всяка клетка на таблица  $101 \times 101$  е записано естествено число. Известно е, че както и да изберем 101 клетки на таблицата, никои две от които не лежат в един ред или стълб, сумата на числата в избраните клетки се дели на 101. Да се докаже, че броят начини да изберем по една клетка от всеки ред на таблицата така, че сумата на числата в избраните клетки да се дели на 101, се дели на 101.