

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 17-19 ноември 2023 г.

София, 2023 г.

Задача 10.1. Да се реши уравнението

$$(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+x\sqrt{x^2+1}=0.$$

Решение. Отговор: $x = -\frac{1}{2}$.

Първи начин: Записваме уравнението във вида $(x+1)\sqrt{x^2+2x+2} = -x\sqrt{x^2+1}$, забелязваме, че и двата израза под корен са строго положителни за всяко реално x , като освен това

$-x(x+1) \geq 0$, откъдето $x \in [-1, 0]$. Повдигаме на втора степен двете страни и преработваме:

$$\begin{aligned}(x^2+2x+1)(x^2+2x+2) &= x^2(x^2+1) \\ x^4+4x^3+7x^2+6x+2 &= x^4+x^2 \\ 2x^3+3x^2+3x+1 &= 0 \\ (2x+1)(x^2+x+1) &= 0.\end{aligned}$$

Тъй като $x^2+x+1 > 0$, то единственото възможно решение е $x = -\frac{1}{2}$. Тъй като $-\frac{1}{2} \in [-1, 0]$, то $x = -\frac{1}{2}$ действително е решение.

Втори начин: Полагаме $a = \sqrt{x^2+2x+2} > 0$ и $b = \sqrt{x^2+1} > 0$. Следователно

$$\begin{aligned}x &= \frac{(x^2+2x+2) - (x^2+1) - 1}{2} = \frac{a^2 - b^2 - 1}{2} \\ x+1 &= \frac{a^2 - b^2 + 1}{2}.\end{aligned}$$

Уравнението е еквивалентно на:

$$\begin{aligned}\frac{a^2 - b^2 + 1}{2} \cdot a + \frac{a^2 - b^2 - 1}{2} \cdot b &= 0 \\ (a^2 - b^2)a + a + (a^2 - b^2)b - b &= 0 \\ (a - b)((a + b)^2 + 1) &= 0.\end{aligned}$$

Оттук, $a = b$ и $x = -\frac{1}{2}$.

Оценяване. (6 точки) 2т. за $x \in [-1, 0]$; 2т. за извеждане на уравнението $2x^3+3x^2+3x+1=0$; 2т. за $x = -\frac{1}{2} \in [-1, 0]$. Ако е повдигнато на втора степен без да са направени ограничения, задачата се оценява най-много на 5т. (ако има проверка за $x = -\frac{1}{2}$).

Алтернативно: (6 точки) 2т. за полагане на a, b ; 2т. за изразяване на x и $x+1$; 2т. за $a = b$ и $x = -\frac{1}{2}$.

Задача 10.2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с център O на описаната окръжност. Точка P е върху страната BC , такава че $BP < \frac{1}{2}BC$. Точка Q е от страната BC такава, че $CQ = BP$. Правата AO пресича BC в точка D , а точка N е среда на AP . Описаната около триъгълник ODQ окръжност пресича за втори път описаната около триъгълник BCO окръжност в точка E . Правите NO и OE пресичат BC съответно в точки K и F . Да се докаже, че точките A, O, K, F лежат на една окръжност.

Решение. Нека AO пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка L , а описаната около $\triangle BOC$ окръжност в точка R . Да означим с X средата на BC , а с Y – диаметрално противоположната на O в описаната около $\triangle BOC$ окръжност. Нека OQ пресича за втори път описаната около $\triangle BOC$ окръжност в точка T .

Имаме $OX \cdot OY = OD \cdot OR = OQ \cdot OT = OE \cdot OF$. От последните три равенства лесно следва, че R, T, F лежат на една права. От $\sphericalangle ORF = \sphericalangle OQP = \sphericalangle QPO = \sphericalangle FPO$ следва,

че $OPRF$ е вписан и значи $PD \cdot DF = OD \cdot DR = DL \cdot DA$. Оттук, $APLF$ е вписан. Но $PL \parallel NO$ (тъй като NO е средна отсечка в $\triangle PLA$) и значи $AOKF$ също е вписан.

Оценяване. (6 точки) 2т. за $OX \cdot OY = OD \cdot OR = OQ \cdot OT = OE \cdot OF$; 3т. за $APLF$ вписан; 1т. за довършване.

Задача 10.3. Да се намерят всички естествени числа k със следното свойство: Съществува полином $f(x)$ с рационални коефициенти, такъв че за всяко естествено число $n > 2023^{2023}$

$$f(n) = \text{НОК}(n+1, n+2, \dots, n+k).$$

Решение. При $k = 1$ и $k = 2$ търсените полиноми са съответно $f(x) = x+1$ и $f(x) = (x+1)(x+2)$. Нека $k \geq 3$ и да допуснем, че съществува такъв полином $f(x)$. За всяко просто число p , степента му в $\text{НОК}(n+1, n+2, \dots, n+k)$ е $\max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, където α_i е степента на p в каноничното представяне на $n+i$, $i = 1, \dots, k$. Ако това е примерно α_s , то тя би се получила ако вземем

$$\frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+k)}{p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} \cdots p^{\alpha_{s-1}} p^{\alpha_{s+1}} \cdots p^{\alpha_k}},$$

като е ясно, че степените на p в знаменателя са делители на $\prod_{1 \leq i \neq s \leq k} (s-i)$. Следователно

$$\text{НОК}(n+1, n+2, \dots, n+k) = \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+k)}{C_n}, \quad (1)$$

където C_n е делител на $\prod_{1 \leq i < j \leq k} (j-i)$. Понеже C_n може да приема краен брой допустими

стойности, ще има естествено число C такова, че за безброй много n , $f(n) = \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+k)}{C}$. Значи за безброй много x $f(x) = \frac{(x+1)(x+2) \cdots (x+k)}{C}$, откъдето

$$f(x) \equiv \frac{(x+1)(x+2) \cdots (x+k)}{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Следователно

$$\text{НОК}(n+1, n+2, \dots, n+k) = \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+k)}{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Да допуснем, че това е възможно. Да изберем просто число $p < k$ такова, че p не дели k . Нека $n+k+1 = p^m$ за достатъчно голямо m . От горната формула имаме

$$\frac{\text{НОК}(n+2, n+3, \dots, n+k+1)}{\text{НОК}(n+1, n+2, \dots, n+k)} = \frac{n+k+1}{n+1}. \quad (2)$$

Степента на p в числителя на лявата страна е m , а в знаменателя – поне 1, докато степента на p в числителя на дясната страна е m , а в знаменателя – 0. Противоречие! Следователно, допускането е грешно и при $k \geq 3$ не съществува полином с исканото свойство.

Оценяване. (7 точки) 1т. за случая $k = 2$; 3т. за (1); 1т. за съществуването на C ; 2т. за извеждане на (2) и избор на подходящо n .

Задача 10.4. Във всяка клетка на таблица 101×101 е записано естествено число. Известно е, че както и да изберем 101 клетки на таблицата, никои две от които не лежат в един ред или стълб, сумата на числата в избраните клетки се дели на 101. Да се докаже, че броят начини да изберем по една клетка от всеки ред на таблицата така, че сумата на числата в избраните клетки да се дели на 101, се дели на 101.

Решение. Нека $p = 101$ и да номерираме редовете и стълбовете на таблицата с числата от 1 до p . С $c_{r,s}$ ще означаваме числото, записано в ред r и стълб s на таблицата. Ще наричаме *ключалка* множество от p клетки, никои две от които не лежат в един ред или стълб. Нека $i \neq j, k \neq l \in \{1, 2, \dots, p\}$ - лесно се вижда, че можем да изберем $p - 2$ клетки, които допълват двойките клетки $(i, k), (j, l)$ и $(i, l), (j, k)$ до ключалки. Тогава от условието следва, че $c_{i,k} + c_{j,l} \equiv c_{i,l} + c_{j,k} \pmod{p}$.

Нека сега изберем цели числа $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_p$ такива, че за всяко i да е изпълнено $c_{1,i} = a_1 + b_i$ и $c_{i,1} = a_i + b_1$. Тогава лесно се проверява, че за всеки r, s е изпълнено $c_{r,s} \equiv a_r + b_s \pmod{p}$.

Ще наричаме *обобщена ключалка* множество от p клетки, никои две от които не се намират в един и същ ред. Искаме да докажем, че броят на обобщените ключалки със сума, кратна на p , е кратен на p . Да разгледаме клетките $(1, k_1), (2, k_2), \dots, (p, k_p)$ и нека с d_j означим броя на тези клетки, които се намират в стълб j . Имаме:

$$\sum_{i=1}^p c_{i,k_i} \equiv \sum_{i=1}^p (a_i + b_{k_i}) \equiv \sum_{i=1}^p a_i + \sum_{i=1}^p d_i b_i \pmod{p}.$$

Това показва, че остатъкът $\pmod{p}$ на сумата на числата в дадена обобщена ключалка зависи единствено от набора $(d_1, d_2, \dots, d_p)$. Да разгледаме набор, за който по-горната сума е кратна на p . Броят обобщени ключалки, които имат този набор, е

$$\frac{p!}{\prod_{i=1}^p d_i!}. \quad (1)$$

Това число се дели на p , стига поне две от числата $d_1, d_2, \dots, d_p$ да са ненулеви (тъй като p е просто). Случаят, в който точно едно от тези числа е ненулево, съответства на обобщена ключалка, в която всички клетки са в един и същ стълб. Следователно броят обобщени ключалки, различни от стълб на таблицата, със сума, кратна на p , се дели на p . Остава да забележим, че за сумата на числата в i -тия стълб на таблицата имаме

$$\sum_{j=1}^p c_{j,i} \equiv \sum_{j=1}^p (a_j + b_i) \equiv \sum_{j=1}^p a_j \pmod{p},$$

и тогава или всички стълбове имат сума, кратна на p , или нито един от стълбовете не е с такава сума. Исканото следва.

Забележка. Твърдението на задачата остава вярно за произволна таблица 101×101 (и съответно $p \times p$, където p е просто число).

Оценяване. (7 точки) 1т. за $c_{i,k} + c_{j,l} \equiv c_{i,l} + c_{j,k} \pmod{p}$; 1т. за $c_{r,s} \equiv a_r + b_s \pmod{p}$; 1т. за наблюдението, че сумата на числата в дадена обобщена ключалка зависи единствено от набора $(d_1, d_2, \dots, d_p)$; 2т. за (1); 2т. за довършване.