

## Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 17-19 ноември 2023 г.

**Задача 11.1.** Четворка  $(a, b, c, d)$  от различни естествени числа се нарича *k-хубава*, ако са изпълнени следните две свойства:

- Измежду числата  $a, b, c, d$  няма три, които да образуват (в някакъв ред) аритметична прогресия.
- Измежду числата  $a + b, a + c, a + d, b + c, b + d$  и  $c + d$  има  $k$ , които образуват (в някакъв ред) аритметична прогресия.

а) Да се намери 4-хубава четворка.

б) Да се намери най-голямото  $k$  за което съществува  $k$ -хубава четворка.

**Задача 11.2.** Върху страните  $AB, BC$  и  $AC$  на триъгълник  $ABC$  са избрани съответно точки  $C_1, A_1$  и  $B_1$  така че  $BA_1 = BC_1$  и  $CA_1 = CB_1$ . Правите  $A_1C_1$  и  $A_1B_1$  пресичат права през  $A$ , успоредна на  $BC$ , съответно в точки  $P$  и  $Q$ . Ако описаните окръжности около триъгълниците  $APC_1$  и  $AQB_1$  се пресичат за втори път в точка  $R$  върху отсечката  $AA_1$ , да се докаже, че точка  $R$  лежи на вписаната в триъгълник  $ABC$  окръжност.

**Задача 11.3.** За естествено число  $n$  са изпълнени следните свойства:

- Числото  $n + 1$  се дели на 24.
- Сборът от квадратите на всички делители на  $n$  (включително 1 и самото  $n$ ) се дели на 48.

Колко най-малко делители може да има  $n$ ?

**Задача 11.4.** Страната  $A$  има  $kt$  града, а страната  $B$  има  $kn$  града ( $k, t, n \in \mathbb{N}$ ). Всеки град от  $A$  е свързан с двупосочна директна авиолиния с всеки град от  $B$ . Те се обслужват от  $k$  авиокомпания (всяка авиолиния се обслужва само от една компания). Други авиолинии, освен посочените, няма. Докажете, че може да изберем авиокомпания и  $t + n$  града, така че да е възможно да се придвижим между всеки два от избраните градове, ползвайки само авиолиниите на тази компания.