

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 17-19 ноември 2023 г.

София, 2023 г.

Задача 11.1. Четворка (a, b, c, d) от различни естествени числа се нарича k -хубава, ако са изпълнени следните две свойства:

- Измежду числата a, b, c, d няма три, които да образуват (в някакъв ред) аритметична прогресия.
- Измежду числата $a + b, a + c, a + d, b + c, b + d$ и $c + d$ има k , които образуват (в някакъв ред) аритметична прогресия.

а) Да се намери 4-хубава четворка.

б) Да се намери най-голямото k за което съществува k -хубава четворка.

Решение. а) Четворката $(7, 6, 4, 3)$ е хубава защото в нея няма три числа, които да образуват аритметична прогресия, а от шестте числа

$$7 + 6 = 13, 7 + 4 = 11, 7 + 3 = 10, 6 + 4 = 10, 6 + 3 = 9, 4 + 3 = 7$$

числата 7, 9, 11, 13 образуват аритметична прогресия.

б) Без ограничение нека $a > b > c > d$. Тогава

$$a + b > a + c > \max(a + d, b + c) > \min(a + d, b + c) > b + d > c + d.$$

Да забележим, че ако:

1. $a + b, a + c$ и $a + d$ образуват аритметична прогресия, то $2(a + c) = (a + b) + (a + d) \iff 2c = b + d$;
2. $a + b, a + c$ и $b + c$ образуват аритметична прогресия, то $2(a + c) = (a + b) + (b + c) \iff 2b = a + c$;
3. $a + d, b + d$ и $c + d$ образуват аритметична прогресия, то $2(b + d) = (a + d) + (c + d) \iff 2b = a + c$.
4. $b + c, b + d$ и $c + d$ образуват аритметична прогресия, то $2(b + d) = (b + c) + (c + d) \iff 2c = b + d$.

И в четирите случая получаваме противоречие с условието на задачата.

От горното е ясно, че всичките 6 числа не могат да образуват аритметична прогресия.

Да допуснем, че 5 от тях образуват аритметична прогресия. Да забележим, че което и от числата $a + b, a + c, a + d, b + c, b + d$ и $c + d$ да изтрием, винаги се среща някоя от прогресиите 1., 2., 3., или 4., противоречие.

От а) следва, че търсеното k е 4.

Оценяване. (6 точки) а) за вярна 4-хубава четворка – 2 точки; б) за наредба на четирите числа и на получените шест сбора – 1 точка; за доказателство, че $k \leq 4$ – 3 точки; частични

результати: за наблюдението, че някой от примерите 1., 2., 3. и 4. води до противоречие – 1 точка; за доказателство, че шестте числа не могат да образуват аритметична прогресия (еквивалентно на $k \leq 5$) – 1 точка.

Задача 11.2. Върху страните AB , BC и AC на триъгълник ABC са избрани съответно точки C_1 , A_1 и B_1 така че $BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$. Правите A_1C_1 и A_1B_1 пресичат права през A , успоредна на BC , съответно в точки P и Q . Ако описаните окръжности около триъгълниците APC_1 и AQB_1 се пресичат за втори път в точка R върху отсечката AA_1 , да се докаже, че точка R лежи на вписаната в триъгълник ABC окръжност.

Решение. От $PQ \parallel BC$ и $BA_1 = BC_1$ получаваме

$$\sphericalangle APC_1 = \sphericalangle C_1A_1B = \sphericalangle A_1C_1B = \sphericalangle AC_1P$$

Тъй като четириъгълникът APC_1R е вписан, имаме

$$\sphericalangle A_1RC_1 = \sphericalangle APC_1 = \sphericalangle PC_1A = \sphericalangle PRA.$$

Аналогично

$$\sphericalangle CA_1B_1 = \sphericalangle CB_1A_1 = \sphericalangle AB_1Q = \sphericalangle AQB_1 = \sphericalangle A_1RB_1 = \sphericalangle ARQ.$$

От $\sphericalangle B_1RC_1 + \sphericalangle B_1A_1C_1 = 180^\circ$ следва, че $RC_1A_1B_1$ е вписан в окръжност k . Понеже $\sphericalangle C_1RA_1 = \sphericalangle C_1A_1B = \sphericalangle A_1C_1B$ и $\sphericalangle B_1RA_1 = \sphericalangle CA_1B_1 = \sphericalangle CB_1A_1$, то k се допира до страните на триъгълник ABC , т.е. k е вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Оценяване. (6 точки) За $\sphericalangle CA_1B_1 = \sphericalangle CB_1A_1 = \sphericalangle AB_1Q = \sphericalangle AQB_1 = \sphericalangle A_1RB_1 = \sphericalangle ARQ$ или съответното му – 2 точки; за $RC_1A_1B_1$ вписан – 2 точки; за извода, че k е вписаната окръжност – 2 точки.

Задача 11.3. За естествено число n са изпълнени следните сквойства:

- Числото $n + 1$ се дели на 24.
- Сборът от квадратите на всички делители на n (включително 1 и самото n) се дели на 48.

Колко най-малко делители може да има n ?

Решение. Тъй като $n + 1$ се дели на 4, то n не е точен квадрат. Следователно делителите на n могат да бъдат разделени на двойки

$$(a_0, b_0) = (1, n); (a_1, b_1), \dots, (a_s, b_s),$$

като броят на делителите на n е $2(s + 1)$. Тъй като 24 дели $n + 1$, то всички делители на n са нечетни и не се делят на 3. За всяко $i = 0, 1, \dots, s$ имаме

$$a_i + b_i = a_i + \frac{n}{a_i} = \frac{a_i^2 - 1 + n + 1}{a_i}$$

и от a_i нечетно, което не се дели на 3 следва, че $a_i^2 - 1$ се дели на 24. Следователно $a_i + b_i$ се дели на 24.

Сега от условието имаме, че

$$\sum_{i=0}^s (a_i^2 + b_i^2) = \sum_{i=0}^s ((a_i + b_i)^2 - 2a_i b_i) = \sum_{i=0}^s (a_i + b_i)^2 - 2n(s+1)$$

се дели на 48. Тъй като 48 дели $(a_i + b_i)^2$ и n е нечетно, то 48 дели $2(s+1)$. Това означава, че n има поне 48 делители.

Числото $n = 23^{47}$ има исканите свойства, защото 24 дели $23^{47} + 1$ и сборът от квадратите на делителите на n е

$$1 + 23^2 + 23^4 + \dots + 23^{94}$$

се дели на 48, защото $23^{2k} = 529^k \equiv 1 \pmod{48}$.

Оценяване. (7 точки) За наблюдението, че всички делители на n са нечетни и не се делят на 3 – 1 точка; за наблюдението, че n не е точен квадрат и делителите му могат да се групират по двойки с произведение $n - 1$ точка; за доказателство, че сборът на числата във всяка двойка се дели на 24 – 2 точки; за доказателство, че n има поне 48 делители (т.е. 48 дели $2(s+1)$) – 1 точка; за намиране на число с 48 делители, което изпълнява условието – 2 точки.

Задача 11.4. Страната A има km града, а страната B има kn града ($k, m, n \in \mathbb{N}$). Всеки град от A е свързан с двупосочна директна авиолиния с всеки град от B . Те се обслужват от k авиокомпани (всяка авиолиния се обслужва само от една компания). Други авиолинии, освен посочените, няма. Докажете, че може да изберем авиокомпания и $m + n$ града, така че да е възможно да се придвижим между всеки два от избраните градове, ползвайки само авиолиниите на тази компания.

Решение. Лема 1. Нека x, y са положителни реални числа, а $k, \ell, \ell \geq k$ са естествени числа. Реалните числа $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, \ell$ удовлетворяват условията

$$\begin{aligned} x_i &\geq 0, y_i \geq 0, x_i + y_i \leq (x + y)/k, i = 1, 2, \dots, \ell; \\ \sum_{i=1}^{\ell} x_i &= x, \sum_{i=1}^{\ell} y_i = y. \end{aligned} \quad (1)$$

Тогава е в сила неравенството

$$\sum_{i=1}^{\ell} x_i y_i \leq \frac{xy}{k}.$$

Равенството се достига само когато $x_i = x/k, y_i = y/k, i = 1, 2, \dots, k; x_i = y_i = 0, i > k$.

Доказателство. Да означим $f(x, y) := \sum_{i=1}^{\ell} x_i y_i$, където $x = (x_1, \dots, x_{\ell}), y = (y_1, \dots, y_{\ell})$. Тъй като условията (1) определят компактно множество, функцията f достига максималната си стойност върху него, да речем в точките x'_i, y'_i . Можем да считаме, че $x'_1 \geq x'_2 \geq \dots \geq$

x'_ℓ . Ще докажем, че y'_i са също в намаляваща последователност. Ако допуснем, че $y'_i < y'_{i+1}$, да разгледаме $x_i = x_{i+1} := (x'_i + x'_{i+1})/2$; $y_i = y_{i+1} := (y'_i + y'_{i+1})/2$. Тогава, (неравенство на Чебишев)

$$x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1} > x'_i y'_i + x'_{i+1} y'_{i+1}$$

което противоречи на максималността на x', y' . По нататък, ако $x'_1 + y'_1 < (x + y)/k$ ние по аналогичен начин може да образуваме $x_1 := x'_1 + \varepsilon, x_2 := x'_2 - \varepsilon; y_1 := y'_1 + \delta, y_2 := y'_2 - \delta$ за подходящи $\varepsilon, \delta \geq 0$ и да получим по-голяма стойност на f . Така че, $x'_1 + y'_1 = (x + y)/k$.

Нека k' е най-голямото естествено число, за което $x_{k'} > 0$ и $y_{k'} > 0$. По същия начин, както по-горе, се вижда че $x'_i + y'_i = (x + y)/k, i = 1, 2, \dots, k'$. Значи $k' \leq k$. Нека допуснем, че $k' < k$ и за определеност $y_i = 0, i > k'$. Да модифицираме x, y по следния начин. Полагаме $x_i := x'_i, y_i := y'_i, i = 1, 2, \dots, k' - 1; x_{k'} := x'_{k'}, y_{k'} := y'_{k'} - \varepsilon, x_{k'+1} := (x + y)/k, y_{k'+1} := \varepsilon$. За $i > k' + 1$ числата y_i са нули, а числата x_i нямат значение, стига да се подчиняват на (1). Тъй като $x'_k < (x + y)/k$, лесно се вижда че $f(x, y) > f(x', y')$ което противоречи на максималността на x', y' .

И така, $k' = k$. Сега ще докажем, че $x'_i = x/k, y'_i = y/k, i = 1, 2, \dots, k$. Да допуснем че това не е вярно и j е първият индекс, за който $x'_j \neq x/k$, като нека за определеност нека $x'_j < x/k$. Тогава, ще съществува $i > j$ за което $x'_i > x/k$, което значи $x'_i > x'_j$ и значи последователността $x'_1, x'_2, \dots, x'_k$ не е намаляваща, противоречие.

С това установихме, че $x'_i = x/k, y'_i = y/k, i = 1, 2, \dots, k$. Тъй като $f(x', y') = kxy$, верността на Лема 1 е доказана.

Обратно към задачата. Броят всички авиолинии е $k^2 mn$. Значи има авиокомпания, която обслужва поне $k mn$ авиолинии. Да премахнем всички останали авиолинии. Ще докажем, че в получения граф, нека бъде K' , има свързана компонента състояща се от поне $m + n$ върха. Да допуснем обратното. Нека свързаните компоненти на K' са $G(A_i, B_i), i = 1, 2, \dots, \ell$ и $|A_i| = m_i, |B_i| = n_i, i = 1, 2, \dots, \ell$. Имаме

$$\sum_{i=1}^{\ell} m_i = km, \sum_{i=1}^{\ell} n_i = kn, m_i + n_i < m + n$$

Съгласно Лема 1,

$$\sum_{i=1}^{\ell} m_i n_i < kmn$$

което противоречи на избора на авиолинията. И така, за поне едно i е изпълнено $m_i + n_i \geq m + n$.

Оценяване. (7 точки) 2т. за стигане до неравенство от типа на Лема 1, 5т. за доказването му.