

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 17-19 ноември 2023 г.

Задача 12.1. Редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е зададена чрез равенствата:

$$x_0 = 1, \\ x_{n+1} = \sin x_n + \frac{\pi}{2} - 1 \text{ за } n \geq 0.$$

Да се докаже, че редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е сходяща и да се определи границата ѝ.

Задача 12.2. Даден е остроъгълен и разностранен триъгълник ABC . Вписаната в триъгълник ABC окръжност с център I допира страните BC , AC и AB съответно в точките D , E и F . Окръжността с център C и радиус CE пресича за втори път правата EF в точка K . Ако X е допирната точка с AB на външнописаната окръжност срещу върха C за триъгълник ABC , то да се докаже, че правите XC , KD и IF се пресичат в една точка.

Задача 12.3. Да се реши в естествени числа уравнението:

$$\sqrt[n]{m} + \sqrt[n]{n} = 2 + \frac{2}{mn(m+n)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}.$$

Задача 12.4. Ще наричаме едно множество S от точки в равнината *есенно*, ако разстоянието между всеки две точки от S е най-много 1. С $f(n, d)$ означаваме най-голямото цяло число, такова че за всяко *есенно* множество S от $3n$ точки в равнината, съществува кръг с диаметър d , който съдържа поне $f(n, d)$ точки от S .

Да се докаже, че съществува $\varepsilon > 0$ (независещо от n), за което за всички $d \in (1 - \varepsilon, 1)$ стойността на $f(n, d)$ не зависи от d и да се определи тази стойност като функция на n .