

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 17-19 ноември 2023 г.

София, 2023 г.

Задача 12.1. Редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е зададена чрез равенствата:

$$x_0 = 1, \\ x_{n+1} = \sin x_n + \frac{\pi}{2} - 1 \text{ за } n \geq 0.$$

Да се докаже, че редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е сходяща и да се определи границата ѝ.

Решение. Първо ще докажем, че редицата е строго растяща. Да отбележим, че за всяко n имаме $x_n \leq \frac{\pi}{2}$, т.к. $\sin x \leq 1$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Освен това имаме, че функцията $f(x) = \sin x - x$ е намаляваща за $x \in \mathbb{R}$, т.к. $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Следователно за $x \in (-\infty, \frac{\pi}{2})$ имаме $f(x) \geq \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$. Така получаваме, че $\sin x_n \geq x_n + 1 - \frac{\pi}{2}$, което е еквивалентно на $x_{n+1} \geq x_n$. Следователно редицата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е растяща и т.к. тя е ограничена следва, че е сходяща. Ако l е нейната граница, то за l е изпълнено, че $l = \sin l + \frac{\pi}{2} - 1$, т.е. $f(l) = f(\frac{\pi}{2})$. Функцията f е намаляваща, което означава, че $l = \frac{\pi}{2}$.

Оценяване. (6 точки) 1т. за доказателство, че $x_n \leq \pi/2$ за всяко n , 3т. за доказателство, че x_n е растяща и 2т. за довършване.

Задача 12.2. Даден е остроъгълен и разностранен триъгълник ABC . Вписаната в триъгълник ABC окръжност с център I допира страните BC , AC и AB съответно в точките D , E и F . Окръжността с център C и радиус CE пресича за втори път правата EF в точка K . Ако X е допирната точка с AB на външнописаната окръжност срещу върха C за триъгълник ABC , то да се докаже, че правите CX , KD и IF се пресичат в една точка.

Решение. Първо ще докажем, че CX и IF се пресичат върху вписаната окръжност. Нека CX пресича вписаната окръжност в точка P . Тогава, ако разгледаме хомотетия h с център C , която изпраща вписаната окръжност във външнописаната окръжност срещу върха C , то $h(P) = X$ и следователно ако t е допирателната през P към вписаната окръжност, то имаме $h(t) = AB$. Последното означава, че $t \parallel AB$ и т.к. $IP \perp t$ и $IF \perp AB$, то получаваме, че $P \in IF$.

От друга страна, ако KD пресича вписаната окръжност за втори път в точка Q , то имаме $\sphericalangle EQD = 180^\circ - \sphericalangle EFD = 90^\circ + \frac{\sphericalangle ACB}{2}$. Имаме, че $\sphericalangle EKD = \frac{\sphericalangle ACB}{2}$, откъдето следва, че $\sphericalangle QEF = 90^\circ$, т.е. $Q \equiv P$. Така получаваме, че правите KD , CX и IF се пресичат в точка P .

Оценяване. (6 точки) 3т. за $CX \cap IF$ лежи на вписаната окръжност и 3т. за $P \in KD$.

Задача 12.3. Да се реши в естествени числа уравнението:

$$\sqrt[n]{m} + \sqrt[n]{n} = 2 + \frac{2}{mn(m+n)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}.$$

Решение. Уравнението няма решение в естествени числа. Ще докажем, че за всички двойки естествени числа (m, n) , за които имаме $\{\sqrt[n]{m}\} > 0$, то е в сила неравенството $\{\sqrt[n]{m}\} \geq \frac{1}{mn}$. Нека $a = \lfloor \sqrt[n]{m} \rfloor$ и $x = \{\sqrt[n]{m}\}$. Тогава имаме, че

$$m - a^n = x \sum_{i=0}^{n-1} m^{\frac{i}{n}} a^{n-1-i}$$

и следователно

$$x \geq \frac{1}{nm^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{1}{nm}.$$

Така получаваме, че $\sqrt[n]{m} + \sqrt[n]{n} \geq 2 + \frac{2}{mn}$, откъдето задачата следва.

Оценяване. (7 точки) 2т. за формулиране на вярно неравенство за дробната част на $\sqrt[n]{m}$, 4т. за доказателството му и 1т. за довършване.

Задача 12.4. Ще наричаме едно множество S от точки в равнината *есенно*, ако разстоянието между всеки две точки от S е най-много 1. С $f(n, d)$ означаваме най-голямото цяло число, такова че за всяко *есенно* множество S от $3n$ точки в равнината, съществува кръг с диаметър d , който съдържа поне $f(n, d)$ точки от S .

Да се докаже, че съществува $\varepsilon > 0$ (независещо от n), за което за всички $d \in (1 - \varepsilon, 1)$ стойността на $f(n, d)$ не зависи от d и да се определи тази стойност като функция на n .

Решение. Първо ще докажем, че съществува $d < 1$, за което винаги можем да намерим окръжност с диаметър d която съдържа n точки от дадените. Нека M е множество от $3n$ точки с диаметър 1 и нека за всяка точка $A \in M$ разгледаме кръг D_A с център A и радиус $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Лема. Ако $A, B, C \in M$, то $D_A \cap D_B \cap D_C \neq \emptyset$.

Доказателство. Ако точките A, B, C образуват остроъгълен триъгълник, то някой от ъглите на триъгълника е с мярка между 60° и 90° . Нека БОО това е $\sphericalangle ACB$. Тогава за радиуса R на описаната около ABC окръжност, получаваме от синусова теорема, че $2R = \frac{AB}{\sin \sphericalangle ACB} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$, откъдето следва, че $R \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ и следователно центърът на описаната окръжност $O \in D_A \cap D_B \cap D_C$.

Ако точките A, B, C образуват тъпоъгълен или правоъгълен триъгълник, то нека БОО $\sphericalangle ACB \geq 90^\circ$. Нека M е средата на AB . Ясно е, че $MA \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ и аналогично $MB < \frac{1}{\sqrt{3}}$, т.е. $M \in D_A \cap D_B$. От друга страна

$$MC^2 = \frac{2AC^2 + 2CB^2 - AB^2}{4} \leq \frac{AB^2}{4} \leq \frac{1}{4},$$

където първото неравенство следва от това, че $\sphericalangle ACB \geq 90^\circ$. Следователно $MC \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ и следователно $M \in D_C$, т.е. наистина $M \in D_A \cap D_B \cap D_C$, с което лемата е доказана.

От теорема на Хели, приложена за множеството от кръгове $\{D_A : A \in M\}$, следва, че т.к. всеки три от тях се пресичат, то $\bigcap_{A \in M} D_A \neq \emptyset$. Нека $P \in \bigcap_{A \in M} D_A$. Тогава кръгът D_P с център P и радиус $\frac{1}{\sqrt{3}}$ съдържа M .

Сега ще покажем, че всеки кръг K с радиус $\frac{1}{\sqrt{3}}$ може да бъде покрит от 3 кръга с радиус $\frac{1}{2}$. Нека точките $A', B', C' \in D_P$ са такива, че $A'B'C'$ е равностранен триъгълник. Тогава $A'B' = B'C' = C'A' = 1$ и кръговете с диаметри $A'B', A'C', B'C'$ покриват D_P .

Аналогично кръгове k_1, k_2, k_3 с центрове средите на $A'B', A'C', B'C'$ и диаметър d "почти" покриват K . Наистина множеството $K \setminus (k_1 \cup k_2 \cup k_3)$ се състои от 3 еднакви фигури, които ще наричаме антилуни поради визуалната прилика. Да отбележим също, че можем да построим антилуни за всеки B, C , лежащи на контура на K и образуващи равностранен триъгълник.

Нека сега да допуснем противното, а именно, че за всяко $d < 1$ можем да изберем множество от $3n$ точки, така че никои n от тях да не лежат в кръг с диаметър d . Да забележим, че ако в трите антилуни съответстващи на някои B, C няма точки от M , то поне един от k_1, k_2, k_3 съдържа n точки. Оттук можем да заключим, че във всяка тройка съответни антилуни има точка от M .

Нека да фиксираме N нечетно и да вземем $3N$ антилуни $A_1, \dots, A_{3N}$ през равни ъгли. Нека също така сме избрали $d < 1$, така че $\text{dist}(A_1, A_{N+2}) > 1$. Това е възможно, защото когато d клони към 1, диаметърът на антилуните сходи към 0. Тъй като разстоянието между две точки, образуващи ъгъл $2\pi(N+1)/3N$, е повече от 1, то от неравенството на триъгълника следва, че съществува $d < 1$, за което $\text{dist}(A_1, A_{N+2}) > 1$.

От предходните ни разсъждения следва, че за всяко i поне една от антилуните A_i, A_{N+i}, A_{2N+i} съдържа точка от M . Нека БОО A_1 съдържа точка от M . Следователно, антилуни $A_{N+2}, \dots, A_{2N}$ не съдържат точки от M . Нека A_m е първата антилуна след A_{2N} , която съдържа точка. Следователно антилуните $A_{m-(2N-1)}, \dots, A_{m-1}$ не съдържат точки от M . От това следва, че антилуни $A_m, \dots, A_{m-(2N+1)}$ съдържат точки. (Антилуната A_{m-2N} е единствената, за която не знаем със сигурност дали съдържа точка). Нека B_i е точката от M в антилуна A_{m-1+i} и нека C_i е центърът на дъгата на A_{m-1+i} .

Сега можем да изберем N достатъчно голямо и $d = d'$ достатъчно близко до 1 така, че:

$$\text{dist}(C_1, B_1) \leq \text{diam}(A_m) < 0.01$$

$$\text{dist}((C_1 + C_{N+1})/2, B_{\lfloor (N+1)/2 \rfloor}) \leq \text{diam}(A_m) + 2\pi/3N < 0.01$$

$$\text{dist}(C_{N+1}, B_N) \leq \text{diam}(A_m) + 2\pi/3N < 0.01$$

Следователно, множеството M лежи изцяло в сечението P на C_1 и трите кръга k_1, k_2, k_3 с центрове $C_1, C_{(N+1)/2}, C_N$ и диаметър 1.01. Но сега лесно се забелязва, че P може да се впише в окръжност K' с радиус $d''/\sqrt{3} < 1/\sqrt{3}$. Но тогава P се покрива (съответно и M) от 3 кръга с диаметър d'' . Следователно, за $d = \max(d', d'')$ със сигурност съществува кръг покриващ поне n точки от M .

Остана да покажем, че за всяко $d < 1$ и всяко $n \in \mathbb{N}$ съществува множество M от $3n$ точки, никои $n+1$ от които не принадлежат на един кръг с диаметър d . Построяваме n еднакво ориентирани равностранни триъгълника със страна $(1+d)/2$, така че разстоянието между всеки 2 съответни върха е по-малко от $(1-d)/10$. Лесно се проверя, че тази конструкция изпълнява необходимите условия.

Оценяване. (7 точки) 2т. за доказателство, че S се покрива от 3 кръга с диаметър 1, 4т. за показване, че S се покрива от 3 кръга с диаметър $d' < 1$, 1т. за конструкция на множество от $3n$ точки, от което не може да бъдат покрити $n+1$ точки с кръг с диаметър d за фиксирано $d < 1$.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.4 – Ивайло Кортезов; 8.2, 8.3 – Мирослав Маринов; 9.1, 10.1 – Недялка Димитрова; 9.2, 10.2, 10.3 – Александър Иванов; 9.3 – Любен Личев; 9.4 – Михаил Школников; 10.4 – Борислав Кирилов; 11.1, 11.2 – Емил Колев; 11.3 – Аделина Чопанова; 11.4 – Драгомир Грозев; 12.1, 12.2, 12.3 – Кристиан Василев; 12.4 – Кристиан Василев и Константин Гаров.