

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

„Акад. Стефан Додунеков“

София, 17 – 19.11.2023

София, 2023

Тема за 6. клас

Задача 1. Пресметнете числата a и b :

$$a = 2,023 \cdot 456 + 20,23 \cdot (-24,5) - 202,3 \cdot (-7,89)$$

$$b = \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 17}$$

и намерете числото x , за което е изпълнено равенството

$$5 - \frac{1}{\frac{1}{5} - \frac{1}{5 - \frac{1}{x}}} = a \cdot b.$$

Решение. Намираме

$$\begin{aligned} a &= 2,023 \cdot 456 + 20,23 \cdot (-24,5) - 202,3 \cdot (-7,89) = 2023 \cdot 0,456 - 2023 \cdot 0,245 + 2023 \cdot 0,789 = \\ &= 2023 \cdot (0,456 - 0,245 + 0,789) = 2023 \cdot 1 = 2023; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 17} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{15} - \frac{1}{17} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{17} \right) = \frac{5}{119}, \quad a \cdot b = 2023 \cdot \frac{5}{119} = 85; \end{aligned}$$

$$5 - \frac{1}{\frac{1}{5} - \frac{1}{5 - \frac{1}{x}}} = 85 \iff \frac{1}{\frac{1}{5} - \frac{1}{5 - \frac{1}{x}}} = -80 \iff \frac{1}{5} - \frac{1}{5 - \frac{1}{x}} = -\frac{1}{80} \iff$$

$$\frac{1}{5 - \frac{1}{x}} = \frac{17}{80} \iff 5 - \frac{1}{x} = \frac{80}{17} \iff \frac{5}{x} = \frac{5}{17} \iff x = 17.$$

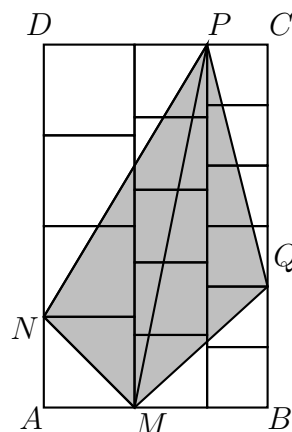
Оценяване: по 2 точки за намиране на a , b и x .

Задача 2. Правоъгълникът $ABCD$ има лице 555 cm^2 и е сглобен от 15 квадрата, както е показано на чертежа.

а) Намерете обиколката на правоъгълника $ABCD$.

б) Намерете лицето на оцветените триъгълници MNP и MPQ .

в) Ако отсечките MP и NQ се пресичат в точка O , докажете, че O е среда на отсечката NQ .



Решение. а) (**2 точки**) Да означим $BC = a$. Тогава страните на квадратите са съответно $\frac{1}{4}a$, $\frac{1}{5}a$ и $\frac{1}{6}a$ и

$$AB = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) a = \frac{37}{60}a.$$

Ако $S_{ABCD} = 555 \text{ cm}^2$, то

$$a \cdot \frac{37}{60}a = 555 \iff a \cdot a = 555 : \frac{37}{60} = 900,$$

откъдето $a = 30 \text{ cm}$. Страните на дадения правоъгълник са $BC = 30 \text{ cm}$ и $AB = \frac{37}{60} \cdot 30 = 18,5 \text{ cm}$, а обиколката му е 97 cm .

б) **(2 точки)** Изразяваме

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}a \cdot \frac{1}{4}a = \frac{1}{32}a^2, \quad S_{PDN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}a \cdot \left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{5}a\right) = \frac{27}{160}a^2,$$

$$S_{PCQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}a \cdot \frac{4}{6}a = \frac{1}{18}a^2, \quad S_{MBQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}a \cdot \left(\frac{1}{6}a + \frac{1}{5}a\right) = \frac{11}{180}a^2,$$

$$S_{AMPD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{5}a\right) \cdot a = \frac{7}{20}a^2, \quad S_{MBCP} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}a + \frac{1}{6}a + \frac{1}{5}a\right) \cdot a = \frac{4}{15}a^2,$$

$$S_{MNP} = S_{AMPD} - S_{AMN} - S_{NPD} = \frac{7}{20}a^2 - \left(\frac{1}{32} + \frac{27}{160}\right)a^2 = \frac{7}{20}a^2 - \frac{1}{5}a^2 = \frac{3}{20}a^2,$$

$$S_{MPQ} = S_{MBCP} - S_{PCQ} - S_{MBQ} = \frac{4}{15}a^2 - \left(\frac{1}{18} + \frac{11}{180}\right)a^2 = \frac{4}{15}a^2 - \frac{7}{60}a^2 = \frac{3}{20}a^2.$$

Следователно $S_{MNP} = S_{MPQ} = \frac{3}{20} \cdot 30^2 = 135 \text{ cm}^2$.

в) **(2 точки)** Да означим с h разстоянието от P до NQ и с t – разстоянието от M до NQ . Тогава

$$S_{MNP} = S_{MNO} + S_{PNO} = \frac{1}{2} \cdot NO \cdot t + \frac{1}{2} \cdot NO \cdot h = \frac{1}{2} \cdot NO \cdot (h + t),$$

$$S_{MQP} = S_{MQO} + S_{PQO} = \frac{1}{2} \cdot QO \cdot t + \frac{1}{2} \cdot QO \cdot h = \frac{1}{2} \cdot QO \cdot (h + t).$$

От б) имаме $S_{MNP} = S_{MPQ}$, следователно $\frac{1}{2} \cdot NO \cdot (h + t) = \frac{1}{2} \cdot QO \cdot (h + t)$, от което следва, че $NO = QO$, т.е. O е среда на NQ .

Задача 3. На един остров живее популация от повече от 100 хамелеони. В понеделник на острова имало само червени и сини хамелеони.

Във вторник 25% от хамелеоните, които в понеделник били сини, станали червени, а 25% от хамелеоните, които в понеделник били червени, станали сини. Така се оказало, че 70% от хамелеоните на острова са сини.

В сряда на острова се родили 10 хамелеони, сини или червени. Така процентът на сините хамелеони на острова станал 68%.

а) Колко процента от хамелеоните на острова са били сини в понеделник?

б) Колко сини хамелеони се родили в сряда и колко хамелеони е имало на острова след това?

в) В четвъртък се срещнали син и червен хамелеон и двата едновременно се оцветили в жълт цвят. По-нататък при всяка среща на два разноцветни хамелеони,

те се оцветявали едновременно в третия цвят. Например, ако се срещнали жълт и червен хамелеон, и двата се превръщали в сини. Възможно ли е в края на деня на острова да е имало равен брой червени и жълти хамелеони?

Решение. а) **(2 точки)** Нека в понеделник имало x сини и y червени хамелеони. Във вторник са $75\%x + 25\%y$ сини и $75\%y + 25\%x$ червени хамелеони. Така

$$70\%(x + y) = 75\%x + 25\%y \iff x = 9y.$$

Следователно в понеделник имало $x = 9y$ сини и y червени хамелеони; общо $10y$, от които сините са били 90% .

б) **(3 точки)** Тъй като броят на хамелеоните е естествено число, то $25\%y = \frac{y}{4}$ е естествено, т.е. $y = 4a$, където a е естествено число. Изразяваме $x = 36a$; общо има $4a + 36a = 40a$ хамелеони. Във вторник стават $75\% \cdot 36a + 25\% \cdot 4a = 28a$ сини и $75\% \cdot 4a + 25\% \cdot 36a = 12a$ червени хамелеони.

В сряда на острова се родили 10 хамелеони и те стават общо $40a + 10$, от които сините са $68\% = \frac{17}{25}$. Ако от новородените хамелеони b са сини, $b \leq 10$, имаме

$$28a + b = \frac{17}{25} \cdot (40a + 10) \iff 20a + 25b = 170 \iff 4a + 5b = 34.$$

Числото b е четно, не се дели на 4, и не надхвърля 6. Следователно $b = 2$, $a = 6$ или $b = 6$, $a = 1$. Във втория случай хамелеоните стават общо 50, а са повече от 100. Следователно $b = 2$, $a = 6$, което означава, че са се родили 2 сини и 8 червени хамелеони, а общо са станали $40 \cdot 6 + 10 = 250$ хамелеони.

в) **(2 точки)** Преди срещата на синия и червения хамелеон в четвъртък е имало $\frac{17}{25} \cdot 250 = 170$ сини, $250 - 170 = 80$ червени и 0 жълти хамелеони.

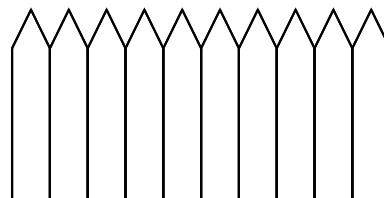
Нека до края на деня е имало x срещи на жълт и червен, y срещи на жълт и син и z срещи на син и червен хамелеон (x, y, z са естествени числа или 0). Тогава червените са станали $80 - x + 2y - z$, а жълтите са станали $2z - x - y$. Равенството

$$80 - x + 2y - z = 2z - x - y \iff 80 = 3(z - y)$$

е невъзможно, тъй като 80 не се дели на 3.

Задача 4. Том Сойер трябва да боядиса 10 поредни дъски от една ограда, като изпълни следните изисквания:

- всяка дъска да е оцветена в бял, син или червен цвят;
- първата и десетата дъски да са бели;
- от две съседни дъски най-много една да е бяла.



а) По колко различни начина Том Сойер може да оцвети оградата?

б) Колко са възможните оцветявания, при които има повече сини, отколкото червени дъски на оградата?

Решение. а) **(4 точки)** Тъй като от всеки две съседни дъски най-много една е бяла, белите дъски са най-много 5. Тъй като крайните са бели, броят на белите дъски е 2, 3, 4 или 5.

Ако белите дъски са две, първата и десетата, цветът на всяка от останалите 8 дъски може да се избере по 2 начина и получаваме 2^8 оцветявания.

Нека белите дъски са три. Втората и деветата не са бели, значи вътрешната бяла дъска е с номер 3, 4, 5, 6, 7 или 8, т.е. нейната позиция може да се избере по 6 начина. При всеки такъв избор останалите 7 дъски се оцветяват в син или червен цвят по 2^7 начина. Получаваме $6 \cdot 2^7$ оцветявания.

Нека белите дъски са четири. Вътрешните две бели дъски може да са с номера: $(3, a)$, където $a = 5, 6, 7$ или 8; $(4, a)$, където $a = 6, 7$ или 8; $(5, a)$, където $a = 7$ или 8; $(6, 8)$. Следователно позицията на двете вътрешни бели дъски може да се избере по $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ начина. При всеки такъв избор останалите 6 дъски се оцветяват в син или червен цвят по 2^6 начина. Получаваме $10 \cdot 2^6$ оцветявания.

Нека белите дъски са пет. Вътрешните три бели дъски може да са с номера: $(3, 5, 7)$, $(3, 5, 8)$, $(3, 6, 8)$, $(4, 6, 8)$. Следователно позицията на трите вътрешни бели дъски може да се избере по 4 начина. При всеки такъв избор останалите 5 дъски се оцветяват в син или червен цвят по 2^5 начина. Получаваме $4 \cdot 2^5$ оцветявания.

Общо оцветяванията са

$$2^8 + 6 \cdot 2^7 + 10 \cdot 2^6 + 4 \cdot 2^5 = 1792.$$

б) **(3 точки)** Първо ще преброим оцветяванията с равен брой червени и сини дъски. Това е възможно само в случаите, когато белите дъски са 2 или 4.

Ако белите дъски са две, първата и десетата, сред останалите 8 дъски мястото на четирите сини може да се избере по $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$ начина.

Ако белите дъски са четири, първата, десетата и две вътрешни, мястото на вътрешните може да се избере по 10 начина (както видяхме в а). При всеки от тези 10 варианта сред останалите 6 дъски мястото на трите сини може да се избере по $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ начина. Така получаваме $10 \cdot 20 = 200$ начина.

Следователно при $70 + 200 = 270$ оцветявания има равен брой червени и сини дъски.

На всяко оцветяване C с повече сини, отколкото червени дъски, можем да съпоставим оцветяване C^* с повече червени, отколкото сини дъски, като в C преоцветим сините в червени и червените в сини. По този начин оцветяванията с различен брой червени и сини дъски се разделят по двойки; в половината от тези оцветявания, т.е. $\frac{1792 - 270}{2} = 761$, сините дъски са повече от червените.