

ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

„Акад. Стефан Додунеков“

Тема за 7. клас

Задача 1. В правоъгълна координатна система Oxy с единична отсечка 1 cm започват да се движат едновременно точките A и B . Точка A тръгва от $(-6; 0)$ и се движи по абсцисната ос в положителна посока със скорост 2 cm/min. Точка B тръгва от $(0; 4)$ и се движи по ординатната ос в отрицателна посока със скорост 1 cm/min.

а) Колко сантиметра е дължината на отсечката AB , когато са изминали точно 9 минути след началото на движението?

б) Ако с S е означено разстоянието между A и B точно n минути след тръгването им, изразете S^2 чрез n и представете S^2 като многочлен в нормален вид.

в) Колко минути след тръгването на точките A и B разстоянието между тях ще е минимално?

Задача 2. Даден е триъгълник ABC със страни $AB = c$ cm, $BC = a$ cm, $CA = b$ cm и за които е изпълнено равенството

$$26a^2 + 25b^2 + 25c^2 + 25 = 10a(3b + 4c + 1).$$

а) Да се намери лицето на триъгълника ABC .

б) Построени са права m през върха A , успоредна на BC , точка P върху страната AC така, че $AP : PC = 1 : 2$ и пресечната точка D на правите m и BP . Намерете лицето на четириъгълника $ABCD$.

Задача 3. За всяко естествено число n означаваме

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n.$$

а) Намерете сбора на всички различни прости делители на S_{23} .

б) Докажете, че стойността на израза

$$A = S_{2023} + \frac{S_{2023} + 1}{2^{1012}} + 2$$

не е просто число.

в) Намерете всички естествени числа n , за които съществува цяло число k , за което

$$S_n = 1 + 3^k + 7^k.$$

Задача 4. Дадени са числата

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n$$

(всяко естествено число от 1 до n е записано по два пъти). Ще казваме, че една подредба на дадените числа е *хубава*, ако между двете единици в получената редица има точно едно число, между двете двойки има точно две числа и т.н., за всяко $k = 1, 2, \dots, n$ между двете числа k в редицата има точно k на брой числа.

Например, хубава подредба при $n = 3$ е 3, 1, 2, 1, 3, 2, а хубава подредба при $n = 4$ е 4, 1, 3, 1, 2, 4, 3, 2.

а) Съществува ли хубава подредба при $n = 15$?

б) Докажете, че при $n = 2022$ не съществува хубава подредба на числата в дадената редица.