

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

ЕСЕНЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

„Акад. Стефан Додунеков“

София, 17 – 19.11.2023

София, 2023

Тема за 7. клас

Задача 1. В правоъгълна координатна система Oxy с единична отсечка 1 cm започват да се движат едновременно точките A и B . Точка A тръгва от $(-6; 0)$ и се движи по абсцисната ос в положителна посока със скорост 2 cm/min. Точка B тръгва от $(0; 4)$ и се движи по ординатната ос в отрицателна посока със скорост 1 cm/min.

а) Колко сантиметра е дължината на отсечката AB , когато са изминали точно 9 минути след началото на движението?

б) Ако с S е означено разстоянието между A и B точно n минути след тръгването им, изразете S^2 чрез n и представете S^2 като многочлен в нормален вид.

в) Колко минути след тръгването на точките A и B разстоянието между тях ще е минимално?

Решение. а) Девет минути след началото на движението A е в точката $(12; 0)$, а B е в точката $(0; -5)$. От теоремата на Питагор за $\triangle OAB$ следва, че $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 12^2 + 5^2 = 169 = 13^2$. Следователно $AB = 13$ cm.

б) При $n = 3$, $OA = 0$, $OB = 1$ cm, $AB = 1$ и $S^2 = 1$.

При $n = 4$, $OB = 0$, $OA = 2$ cm, $AB = 2$ и $S^2 = 4$.

При $n \neq 3$ и $n \neq 4$, $OA = |2n - 6|$ и $OB = |n - 4|$. Тогава от $\triangle OAB$ според теоремата на Питагор следва, че

$$S^2 = AB^2 = OA^2 + OB^2 = (2n - 6)^2 + (n - 4)^2 = 5n^2 - 32n + 52.$$

Резултатът остава в сила и за частните случаи $n = 3$ и $n = 4$.

Отговор. $5n^2 - 32n + 52$.

в) Тъй като

$$S^2 = 5n^2 - 32n + 52 = 5(n^2 - 2 \cdot 3,2n + 10,24) + 0,8 = 5(n - 3,2)^2 + 0,8$$

и $(n - 3,2)^2 \geq 0$, то S ще е минимално при $n = 3,2$.

Оценяване. а) 1 точка; б) 3 точки; в) 2 точки.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC със страни $AB = c$ cm, $BC = a$ cm, $CA = b$ cm и за които е изпълнено равенството

$$26a^2 + 25b^2 + 25c^2 + 25 = 10a(3b + 4c + 1).$$

а) Да се намери лицето на триъгълника ABC .

б) Построени са права m през върха A , успоредна на BC , точка P върху страната AC така, че $AP : PC = 1 : 2$ и пресечната точка D на правите m и BP . Намерете лицето на четириъгълника $ABCD$.

Решение. а) Преобразуваме израза до

$$(a - 5)^2 + (3a - 5b)^2 + (4a - 5c)^2 = 0.$$

Тъй като $(a - 5)^2 \geq 0$, $(3a - 5b)^2 \geq 0$, $(4a - 5c)^2 \geq 0$, то равенството е възможно само при $a - 5 = 3a - 5b = 4a - 5c = 0$, откъдето намираме, че $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$. И тъй като $a^2 = b^2 + c^2$, даденият триъгълник е правоъгълен с хипотенуза a и катети b и c ,

откъдето следва, че лицето му $S = \frac{bc}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$.

б) Намираме $AP = \frac{1}{3} \cdot AC = 1 \text{ cm}$, $PC = 2 \text{ cm}$, $S_{APB} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2 \text{ cm}^2$ и $S_{CPB} = 6 - 2 = 4 \text{ cm}^2$.

В трапеца $CBAD$ имаме равенството на лицата $S_{DPC} = S_{APB} = 2 \text{ cm}^2$. От

$$\frac{S_{DPC}}{S_{DPA}} = \frac{PC}{PA} = \frac{S_{BPC}}{S_{BPA}}$$

намираме $S_{DPA} = \frac{2 \cdot 2}{4} = 1 \text{ cm}^2$ и тогава $S_{ABCD} = 6 + 2 + 1 = 9 \text{ cm}^2$.

Оценяване. а) 4 точки: за представяне на израза като сбор на квадрати – 2 точки; обосновка и намиране на a, b, c – 1 точка; обосновка на правоъгълния триъгълник и намиране на лицето – 1 точка; б) 2 точки.

Задача 3. За всяко естествено число n означаваме

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n.$$

а) Намерете сбора на всички различни прости делители на S_{23} .

б) Докажете, че стойността на израза

$$A = S_{2023} + \frac{S_{2023} + 1}{2^{1012}} + 2$$

не е просто число.

в) Намерете всички естествени числа n , за които съществува цяло число k , за което

$$S_n = 1 + 3^k + 7^k.$$

Решение. Имаме

$$1 + 2S_n = 1 + 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = S_n + 2^{n+1},$$

т.е. $1 + 2S_n = S_n + 2^{n+1}$, откъдето следва, че $S_n = 2^{n+1} - 1$.

а) Разлагаме на множители:

$$\begin{aligned} S_{23} &= (2^{12})^2 - 1 = (2^{12} - 1)(2^{12} + 1) = (2^4 - 1)(2^8 + 2^4 + 1)(2^4 + 1)(2^8 - 2^4 + 1) = \\ &= 15 \cdot 273 \cdot 17 \cdot 241 = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 241. \end{aligned}$$

Търсеният сбор е $3 + 5 + 7 + 13 + 17 + 241 = 286$.

б) Имаме

$$A = 2^{2024} - 1 + 2^{2024} : 2^{1012} + 2 = 2^{2024} + 2^{1012} + 1 = 2^{2024} + 2 \cdot 2^{1012} + 1 - 2^{1012} =$$

$$= (2^{1012} + 1)^2 - (2^{506})^2 = (2^{1012} - 2^{506} + 1)(2^{1012} + 2^{506} + 1),$$

с което е доказано, че A е произведение на две естествени числа, по-големи от 1.

в) Търсим естествени числа n и цели числа k , за които е изпълнено равенството

$$2^{n+1} - 1 = 1 + 3^k + 7^k \iff 2^{n+1} = 2 + 3^k + 7^k.$$

При $n = 1$ равенството е изпълнено при $k = 0$.

При $n \geq 2$ лявата страна на равенството се дели на 8.

При нечетно k имаме $3^k \equiv 3 \pmod{8}$, $7^k \equiv 7 \pmod{8}$, следователно $2 + 3^k + 7^k \equiv 4 \pmod{8}$ и равенството е невъзможно.

При четно k имаме $3^k \equiv 1 \pmod{8}$, $7^k \equiv 1 \pmod{8}$, следователно $2 + 3^k + 7^k \equiv 4 \pmod{8}$ и отново равенството е невъзможно.

Следователно $n = 1$ е единственото решение.

Оценяване. Доказателство на формулата за $S_n - 1$ точка; а) 2 точки; б) 2 точки; в) 2 точки.

Задача 4. Дадени са числата

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n$$

(всяко естествено число от 1 до n е записано по два пъти). Ще казваме, че една подредба на дадените числа е *хубава*, ако между двете единици в получената редица има точно едно число, между двете двойки има точно две числа и т.н., за всяко $k = 1, 2, \dots, n$ между двете числа k в редицата има точно k на брой числа.

Например, хубава подредба при $n = 3$ е 3, 1, 2, 1, 3, 2, а хубава подредба при $n = 4$ е 4, 1, 3, 1, 2, 4, 3, 2.

а) Съществува ли хубава подредба при $n = 15$?

б) Докажете, че при $n = 2022$ не съществува хубава подредба на числата в дадената редица.

Решение. а) Една хубава подредба при $n = 15$ е:

$$12, 10, 8, 14, 5, 3, 1, 15, 1, 3, 5, 8, 10, 12, 7, 13, 11, 9, 14, 6, 4, 2, 7, 15, 2, 4, 6, 9, 11, 13.$$

б) Да допуснем, че съществува хубава подредба. Да номерираме позициите на дадените 4044 числа отляво надясно.

Нека a_1 е първата позиция, в която се появява числото 1; втората такава позиция е $a_1 + 2$.

$$\dots \quad \boxed{1} \quad \boxed{} \quad \boxed{1} \quad \dots$$

$$a_1 \quad a_1 + 1 \quad a_1 + 2$$

Ако a_2 е първата позиция, в която се появява числото 2; втората такава позиция е $a_2 + 3$.

$$\dots \quad \boxed{2} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{2} \quad \dots$$

$$a_2 \quad a_2 + 1 \quad a_2 + 2 \quad a_2 + 3$$

Въобще за всяко $k = 1, 2, \dots, 2022$ позициите, в които се появява числото k в хубавата подредба означаваме с a_k и $a_k + k + 1$.

Сборът на всички позиции в редицата е равен на

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}) + (a_1 + 2 + a_2 + 3 + \dots + a_{2022} + 2023) &= \\&= 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}) + 2 + 3 + \dots + 2023 = \\&= 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}) + \frac{2023 \cdot 2024}{2} - 1 = \\&= 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}) + 2023 \cdot 1012 - 1.\end{aligned}$$

От друга страна, този сбор е

$$1 + 2 + \dots + 4044 = \frac{4044 \cdot 4045}{2} = 2022 \cdot 4045.$$

Получихме, че

$$2022 \cdot 4045 = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}) + 2023 \cdot 1012 - 1,$$

което е невъзможно, тъй като лявата страна на равенството е четна, а дясната е нечетна.

Следователно при $n = 2022$ не съществува хубава подредба.

Забележка. По същия начин се доказва, че не съществува хубава подредба при $n = 4k + 1$ и $n = 4k + 2$.

Оценяване: а) 3 точки; б) 4 точки.