

Съюз на математиците в България  
Американска фондация за България  
Фондация Георги Чиликов

---

# Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 17-19 ноември 2023 г.

София, 2023 г.

### Условия, кратки решения и критерии за оценяване

**Задача 8.1.** Нека  $a$  е най-голямата стойност на израза  $24y - 9y^2$ , където  $y$  е рационално число, а  $b$  е най-малкото цяло число, изпълняващо неравенството

$$(t+3)^3 - (6t-7)^2 - (t-9)^3 < 3.$$

Разложете на (неразложими) множители с цели коефициенти израза

$$a(x-1)x^3 + bx - 2x - 1.$$

*Решение.* Имаме  $24y - 9y^2 = 16 - (3y - 4)^2$ , чиято най-голяма стойност  $a = 16$  се достига за  $y = \frac{4}{3}$ . Даденото неравенство е еквивалентно с

$$t^3 + 9t^2 + 27t + 27 - 36t^2 + 84t - 49 - t^3 + 27t^2 - 243t + 729 < 3$$

$$-132t + 704 < 0,$$

т.е.  $t > \frac{16}{3}$  и  $b = 6$ . Замествайки  $a = 16$ ,  $b = 6$  в дадения израз, получаваме

$$\begin{aligned} 16(x-1)x^3 + 6x - 2x - 1 &= 16x^4 - 16x^3 + 4x - 1 \\ &= (16x^4 - 1) - 4x(4x^2 - 1) = (4x^2 - 1)(4x^2 + 1) - 4x(4x^2 - 1) \\ &= (4x^2 - 4x + 1)(2x - 1)(2x + 1) = (2x - 1)^3(2x + 1). \end{aligned}$$

**Оценяване.** (6 точки) 2 т. за обосновано намиране на  $a$ ; 2 т. за обосновано намиране на  $b$ ; 2 т. за разлагане до неразложими множители и то само при правилно намерени  $a, b$ .

**Задача 8.2.** Изпъкнал четириъгълник ще наричаме *иновативен*, ако диагоналите му го разделят на четири триъгълника с едни и същи мерки на ъглите. Например квадратът е иновативен четириъгълник, понеже четирите триъгълника са с мерки  $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ . Да се намерят мерките на ъглите на иновативен четириъгълник, ако една от тях е  $13^\circ$ .

*Отговор.*  $90^\circ, 90^\circ, 167^\circ, 13^\circ$  или  $13^\circ, 167^\circ, 13^\circ, 167^\circ$

*Решение.* Нека четириъгълникът е  $ABCD$  с  $\angle BAD = 13^\circ$  и диагоналите  $AC$  и  $BD$  се пресичат в  $O$ . Ако допуснем, че диагоналите не са перпендикулярни, то при  $\angle AOB > 90^\circ$  (случаят  $\angle AOD > 90^\circ$  е аналогичен) имаме  $\angle AOB > 90^\circ > \angle AOD$  и  $\angle AOB > \angle OAD$ ,  $\angle AOB > \angle ODA$  (понеже  $\angle AOB$  е външен ъгъл за триъгълника  $AOD$ ), т.е. мярката на  $\angle AOB$  не се среща в триъгълника  $AOD$ , противоречие. Така  $AC$  и  $BD$  са перпендикулярни. Нататък, ако  $\angle BAO = \angle ADO$ , то  $\angle BAD = \angle BAO + \angle OAD = \angle BAO + 90^\circ - \angle ADO = 90^\circ$ , противоречие с  $\angle BAD = 13^\circ$ . Така остава само възможността  $\angle BAO = \angle DAO$ , като в такъв случай  $AC$  разполовява  $\angle BAD$ , т.е.  $AC$  е симетрала на  $BD$ . Сега от триъгълниците  $AOD$  и  $DOC$  следва или  $\angle ADO = \angle CDO$  (в такъв случай  $BD$  е симетрала на  $AC$  и  $ABCD$  е ромб), или  $\angle ADO = \angle DCO = 90^\circ - \angle CDO$ , т.е.  $\angle ADC = 90^\circ$ , аналогично  $\angle ABC = 90^\circ$  и четвъртият ъгъл е  $\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD$ .

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за верен отговор, 2 т. за доказателство, че диагоналите са перпендикулярни (не се дават точки само за предполагане на този факт), 1 т. за обосновка, че единият от диагоналите разполовява два срещуположни ъгъла на четириъгълника, по 1 т. за всеки от двата случая за другия диагонал,

**Задача 8.3.** Да се намерят всички двойки  $(a, b)$  от взаимно прости естествени числа, такива че  $a < b$  и  $b$  дели

$$(n+2)a^{n+1002} - (n+1)a^{n+1001} - na^{n+1000}$$

за всяко естествено число  $n$ .

*Отговор.*  $(a, b) = (3, 5)$ .

*Решение.* Понеже  $a$  и  $b$  са взаимно прости, то такива са  $b$  и  $a^{n+1000}$ , съответно исканото е еквивалентно на  $b$  да дели  $(n+2)a^2 - (n+1)a - n$  за всяко  $n$ . От  $n = 1$  и  $n = 2$  получаваме, че непременно  $b$  дели  $3a^2 - 2a - 1$  и  $4a^2 - 3a - 2$ . Оттук  $b$  дели

$$4(3a^2 - 2a - 1) - 3(4a^2 - 3a - 2) = a + 2$$

и тъй като  $3a^2 - 2a - 1 = 3(a-2)(a+2) - 2(a+2) + 15$ , то непременно  $b$  дели 15.

Явно  $b > a \geq 1$ , т.е.  $b \geq 2$ . Ако  $b = 15$ , то  $b \mid a+2$  дава  $a = 13$ , но  $4 \cdot 13^2 - 3 \cdot 13 - 2 = 635$  не се дели на 3. Ако  $b = 3$ , то  $a = 1$ , но  $4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = -1$  не се дели на 3.

Остава  $b = 5$ , съответно  $a = 3$ . Действително,  $(n+2) \cdot 3^2 - (n+1) \cdot 3^1 - n = 5(n+3)$  се дели на 5.

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за верен отговор и проверката му; 6 т. за отхвърляне на всяка друга възможност, от които: 1 т. за свеждане до делимост на многочлени от най-много втора степен, 1 т. за фокусиране върху изрази от (поне две) малки  $n \leq 4$ , 1 т. за свеждане до делимост на два многочлена от най-много първа степен, 2 т. за извод от вида  $b \mid 5p$ , където  $p$  е просто число, 1 т. за отхвърляне на 1,  $p$  и  $5p$ , както и на  $a \neq 3$  при  $b = 5$ .

**Задача 8.4.** Във всяко от полетата на квадратна таблица  $9 \times 9$  е записано цяло число. За всеки  $k$  числа, намиращи се в един и същ ред (стълб), сборът им е в същия ред (стълб). Намерете най-малкия възможен брой нули в таблицата, ако:

а)  $k = 5$ ;

б)  $k = 8$ .

*Отговор.* а) 63; б) 0.

*Решение.* а) Пример: номерираме редовете и стълбовете от 1 до 9. Записваме 1 в полетата  $(i; i)$  ( $i = 1, \dots, 9$ );  $-1$  в поле  $(1; 9)$  и в полетата  $(i; i-1)$  ( $i = 2, \dots, 9$ ); 0 в останалите полета. Възможните сборове са 1, 0 и  $-1$ .

Оценка: Да предположим, че има поне 19 ненулеви числа. От принципа на Дирихле на някой ред ще има поне три ненулеви числа, а значи и поне две ненулеви числа с еднакъв знак, да речем положителни (ситуацията при отрицателни е аналогична). Да наредим числата в този ред по големина:  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_9$ , където  $a_9 \geq a_8 > 0$ . Ако  $a_5 \geq 0$ , то  $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \geq a_8 + a_9 > a_9$  трябва да е на същия ред: абсурд. Ако  $a_5 < 0$ , то  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < a_1$  трябва да е на същия ред: абсурд.

б) Възможен пример без нули е както следва (работи, понеже  $5 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = 3$  и  $4 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) = -4$ ):

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 3  | 3  | 3  | 3  | 3  | -4 | -4 | -4 | -4 |
| -4 | 3  | 3  | 3  | 3  | 3  | -4 | -4 | -4 |
| -4 | -4 | 3  | 3  | 3  | 3  | 3  | -4 | -4 |
| -4 | -4 | -4 | 3  | 3  | 3  | 3  | 3  | -4 |
| -4 | -4 | -4 | -4 | 3  | 3  | 3  | 3  | 3  |
| 3  | -4 | -4 | -4 | -4 | 3  | 3  | 3  | 3  |
| 3  | 3  | -4 | -4 | -4 | -4 | 3  | 3  | 3  |
| 3  | 3  | 3  | -4 | -4 | -4 | -4 | 3  | 3  |
| 3  | 3  | 3  | 3  | -4 | -4 | -4 | -4 | 3  |
| 3  | 3  | 3  | 3  | 3  | -4 | -4 | -4 | -4 |

**Оценяване.** (7 точки) а) 2 т. за работещ пример (ако проверката, че примерът работи, е неочевидна, тя трябва да присъства) и 2 т. за обоснована оценка; б) 3 т. за работещ пример (ако проверката, че примерът работи, е неочевидна, тя трябва да присъства).