

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 17-19 ноември 2023 г.

Задача 9.1. Дадени са функциите $f(x) = |x-2| - |x-4|$ и $g(x) = |x-8| - 2$. Да се пресметне лицето на фигурата с върхове, пресечните точки на графиките на функциите $f(x)$ и $g(x)$ и пресечните точки на графиката на $g(x)$ с оста Ox .

Задача 9.2. Даден е тъпоъгълен равнобедрен триъгълник ABC ($AC = BC$), около който е описана окръжност с център O . Точка P е произволна точка върху основата AB , такава че $AP < \frac{1}{2}AB$. Точка Q лежи на основата AB и $BQ = AP$. Окръжността с диаметър CQ пресича описаната около триъгълник ABC окръжност за втори път в точка E , а правите CE и AB се пресичат в точка F . Ако N е средата на CP и правите ON и AB се пресичат в точка D , да се докаже че точките O, D, C, F лежат на една окръжност.

Задача 9.3. В къщата на богатата лейди Гилмор се случила кражба на една от най-скъпите ѝ ценности: нейната перлена огърлица. Задачата за разплитането на мистерията паднала на плещите на инспектор Гудинаф. Той разполагал със следната информация: в деня на кражбата, в стаята с огърлицата били влизали 7 от слугите на лейди Гилмор, които ще наричаме A, B, C, D, E, F, G поради конфиденциалност на разследването. Всеки от тях твърди, че е присъствал в стаята само веднъж за неопределен период от време. Освен това A твърди, че е срещал B, C, F, G в стаята; B твърди, че е срещал A, C, D, E, F ; C твърди, че е срещал A, B, E ; E твърди, че е срещал B, C, F ; F твърди, че е срещал A, B, D, E ; G твърди, че е срещал A, D и D твърди, че е срещал B, F, G . Инспектор Гудинаф заключил, че точно един от слугите лъже. Кой е той?

Задача 9.4. Нека p и q са взаимнопрости цели числа и $|\frac{p}{q}| \leq 1$. Да се определи за кои стойности на p и q съществува представяне от вида

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}}$$

за краен брой четни числа $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Бележка: Това представяне се нарича верижна дроб и може да бъде означавано и като $[b_1, b_2, \dots, b_n]$.