

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 17-19 ноември 2023 г.

София, 2023 г.

Задача 9.1. Дадени са функциите $f(x) = |x-2| - |x-4|$ и $g(x) = |x-8| - 2$. Да се пресметне лицето на фигурата с върхове, пресечните точки на графиките на функциите $f(x)$ и $g(x)$ и пресечните точки на графиката на $g(x)$ с оста Ox .

Решение. Графиката на $g(x)$ се състои от два лъча с общ връх в $x = 8$. Разкриваме модула и лесно изчисляваме пресечните ѝ точки с оста Ox чрез уравненията $6 - x = 0$ и $x - 10 = 0$ - $A(6, 0)$ и $B(10, 0)$.

След разкриване на модулите в $f(x)$ виждаме че в интервала $(-\infty, 2)$ $f(x) = -2$, в интервала $[2, 4]$ $f(x) = 2x - 6$ и в интервала $(4, \infty)$ $f(x) = 2$.

Решаваме уравненията $f(x) = g(x)$ за всеки от трите интервала. Получаваме следните пресечни точки - $D(4, 2)$ и $C(12, 2)$.

От координатите следва, че фигурата $ABCD$ е трапец с основи 8 и 4 и височина 2. Следователно лицето му е $\frac{8+4}{2} = 12$.

Оценяване. (6 точки) 2т за пресечните точки на $g(x)$ с Ox . 2т. за пресечните точки на $g(x)$ с $f(x)$. 1т. за това че разглежданата фигура е трапец. 1т. за довършване.

Задача 9.2. Даден е тъпоъгълен равнобедрен триъгълник ABC ($AC = BC$), около който е описана окръжност с център O . Точка P е произволна точка върху основата AB , такава че $AP < \frac{1}{2}AB$. Точка Q лежи на основата AB и $BQ = AP$. Окръжността с диаметър CQ пресича описаната около триъгълник ABC окръжност за втори път в точка E , а правите CE и AB се пресичат в точка F . Ако N е средата на CP и правите ON и AB се пресичат в точка D , да се докаже че точките O, D, C, F лежат на една окръжност.

Решение. Нека T е среда на CQ и нека означим $\angle NOC = \angle TOC = \alpha$. OT е перпендикулярна на CE защото T е център на окръжността с диаметър CQ . Нека K е пресечна точка на ON и CF . Намираме $\angle OKC = \angle OKF = 90 - 2\alpha$. От $\angle PDN = \angle PDK = 90 - \alpha$ намираме $\angle DFC = \alpha$ т.е. $\angle COD = \angle CFD = \alpha$. Това завършва доказателството.

Оценяване. (6 точки) 2т. за въвеждане на $\angle TOC$; 1т. за перпендикулярността; 1т. за $\angle OKC = \angle OKF = 90 - 2\alpha$; 1т. за $\angle DFC = \alpha$; 1т. за довършване.

Задача 9.3. В къщата на богатата лейди Гилмор се случила кражба на една от най-скъпите ѝ ценности: нейната перлена огърлица. Задачата за разплитането на мистерията паднала на плещите на инспектор Гудинаф. Той разполагал със следната информация: в деня на кражбата, в стаята с огърлицата били влизали 7 от слугите на лейди Гилмор, които ще наричаме A, B, C, D, E, F, G поради конфиденциалност на разследването. Всеки от тях твърди, че е присъствал в стаята само веднъж за неопределен период от време. Освен това A твърди, че е срещал B, C, F, G в стаята; B твърди, че е срещал A, C, D, E, F ; C твърди, че е срещал A, B, E ; E твърди, че е срещал B, C, F ; F твърди, че е срещал A, B, D, E ; G твърди, че е срещал A, D и D твърди, че е срещал B, F, G . Инспектор Гудинаф заключил, че точно един от слугите лъже. Кой е той?

Решение. Първо ще докажем следната лема.

Лема. Нека X, Y, Z и T са четирима от слугите. Ако е известно, че двойките X, Y ; Y, Z ; Z, T и T, X са били заедно в стаята в даден момент, то някоя от двойките X, Z и Y, T също са се засекли.

Доказателство на Лема. Нека без ограничение на общността допуснем, че Y и T не са били заедно в стаята и Y си е тръгнал от стаята преди T (останалите случаи са аналогични). Тогава, X и Z са стояли в стаята заедно в периода между напускането на Y и пристигането на T .

Да забележим, че A, C, E, F удовлетворяват условието на лемата, но никой от A, E и C, F не са се засякли. Същото важи за A, B, D, G . Единствен общ елемент на тези двойки е A . Остава да се уверим, че е възможно всички останали двойки да са се срещнали, както твърдят, влизайки точно по веднъж. Това е възможно при следната последователност от влизания и излизания: влиза G , влиза D , излиза G , влиза B , влиза F , излиза D , влиза E , излиза F , влиза C , излиза B , излиза E , излиза C .

Оценяване. (7 точки) 2т за твърдението на лемата; 2т за правилно доказателство на лемата; по 1т за всяка четворка, изобличаваща A ; 1т за пример, че всички освен A казват истината.

Задача 9.4. Нека p и q са взаимнопрости цели числа и $|\frac{p}{q}| \leq 1$. Да се определи за кои стойности на p и q съществува представяне от вида

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}}$$

за краен брой четни числа $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Бележка: Това представяне се нарича верижна дроб и може да бъде означавано и като $[b_1, b_2, \dots, b_n]$.

Решение.

Ще докажем че това е възможно точно когато едно от двете числа p и q е четно.

1) Необходимост. Ако всички b_i са четни, ще докажем че pq е четно. Ще използваме индукция по n . За $n = 1$ това е очевидно.

Нека направим следното представяне:

$$\frac{p}{q} = [b_1, \dots, b_n] = \frac{1}{b_1 + [b_2, \dots, b_n]} = \frac{1}{b_1 + \frac{p'}{q'}} = \frac{q'}{b_1 q' + p'}$$

Тук b_1 е четно и по индукционен допускание точно едно от p' и q' също е четно. Лесно се вижда това завършва доказателството на тази посока.

2) Достатъчност. Ще докажем, че съществуват такива четни числа $[b_1, \dots, b_n]$ при pq четно. Отново ще ползваме индукция, но този път по $|q|$.

За $|q| = 2$ твърдението отново е очевидно.

Нека разгледаме числата $\left[\frac{q}{p}\right]$ и $\left[\frac{q}{p}\right] + 1$. Едно от тях е четно. Да го наречем b и да отбележим, че не може да е 0. Числото $b - \frac{q}{p}$ е по-малко от единица и може да бъде записано като несъкратима дроб $\frac{p'}{q'} = b - \frac{q}{p}$ или алтернативно $\frac{p}{q} = \frac{1}{b + \frac{p'}{q'}}$, като $|q| > |q'|$. Сега аналогично на

предния случай можем да докажем че $p'q'$ е четно и $\frac{p'}{q'}$ има необходимото представяне според индукционното допускание. Но тогава и $\frac{p}{q}$ има такова. Това завършва доказателството.

Оценяване. (7 точки) 1т за правилен отговор. 3т. за всяка посока на доказателството.

Бележка: Това твърдение, както и самите верижни дроби, имат приложение в теория на възлите. Също така е доказано и единственост на представянето, макар че това свойство не се иска в задачата.