

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 15-17 ноември 2024 г.

Задача 10.1. Да се намерят всички двойки реални числа $(x; y)$, които са решения на системата

$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 88 \\ (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 40 \end{cases}.$$

Задача 10.2. Даден е неравнобедрен остроъгълен триъгълник ABC , в който AL ($L \in BC$) е ъглополовящата на $\angle BAC$ и M е средата на BC . Нека ъглополовящите на $\angle AMB$ и $\angle CMA$ пресичат AB и AC съответно в точките P и Q . Да се докаже, че описаната окръжност около триъгълника APQ се допира до BC тогава и само тогава, когато минава през L .

Задача 10.3. Да се намерят всички полиноми P с цели коефициенти, за които съществува естествено число N , такова че за всяко $n \geq N$, всеки прост делител на $n + 2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ е делител и на $P(n)$. (Тук $\lfloor x \rfloor$ означава най-голямото цяло число, по-малко или равно на реалното число x .)

Задача 10.4. Дадени са пълен ориентиран граф G с 2024 върха и естествено число $k \leq 10^5$. Ангел и Борис играят следаната игра: Ангел оцветява k от ребрата на G в червено и поставя пул в един от върховете на G . След това двамата правят ходове, редувайки се; Ангел започва. На всеки свой ход той премества пула в съседен връх, след което Борис променя ориентацията на някое от ребрата, което не е червено. Ако в някакъв момент Ангел не може да премести пула, то той губи и победител е Борис. Да се определи в зависимост от G и k дали Борис има печеливша стратегия.