

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 15-17 ноември 2024 г.

София, 2024 г.

Задача 10.1. Да се намерят всички двойки реални числа $(x; y)$, които са решения на системата

$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 88 \\ (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 40 \end{cases}.$$

Отговор. 4 решения: $(x; y) = (\sqrt{7} \pm 1, \sqrt{7} \mp 1)$; $(x; y) = (-\sqrt{7} \pm 1, -\sqrt{7} \mp 1)$.

Решение. Първи метод. Тъй като $x^2 + y^2 \geq 0$, то в дефиниционната област на квадратния корен попадат всички реални $(x; y)$. Събирайки двете уравнения и разделяйки всяка от двете страни на две, получаваме

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 = 64 = 4^3 \quad \implies \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \text{ и } x^2 + y^2 = 16.$$

Изваждайки от първото уравнение второто и разделяйки всяка от двете страни на две, получаваме

$$xy\sqrt{x^2 + y^2} = 24 \quad \implies \quad xy = 24/4 = 6 \quad \implies \quad x^2y^2 = 36.$$

Според формулите на Виет x^2 и y^2 са корените на уравнението

$$t^2 - 16t + 36 = 0 \quad \implies \quad t_{1,2} = 8 \pm 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} \pm 1)^2.$$

Оттук $x, y \in \{\sqrt{7} \pm 1, -\sqrt{7} \pm 1\}$. От съображения за симетрия виждаме, че ако $(x; y)$ е решение, то решения са и $(y; x)$, $(-x; -y)$ и $(-y; -x)$. Тъй като $xy = 6 > 0$, то x и y са с еднакви знаци. Следователно всяка една от четирите възможности за $x \in \{\sqrt{7} \pm 1, -\sqrt{7} \pm 1\}$ еднозначно определя съответното y и така получаваме четирите решения на задачата $(x; y) = (\sqrt{7} \pm 1, \sqrt{7} \mp 1)$; $(x; y) = (-\sqrt{7} \pm 1, -\sqrt{7} \mp 1)$.

Втори метод. От $x^2 + y^2 = 16$ и $xy = 6$ получаваме $(x + y)^2 = 16 + 2 \cdot 6 = 28$, откъдето $|x + y| = 2\sqrt{7}$. Ако $x + y = 2\sqrt{7}$, то x и y са корени на квадратното уравнение

$$t^2 - 2\sqrt{7}t + 6 = 0 \quad \iff \quad t_{1,2} = \sqrt{7} \pm 1,$$

и поради симетрията на x и y в този случай уравнението има 2 решения: $(x; y) = (\sqrt{7} \pm 1; \sqrt{7} \mp 1)$.

Ако пък $x + y = -2\sqrt{7}$, то x и y са корени на квадратното уравнение

$$t^2 + 2\sqrt{7}t + 6 = 0 \quad \iff \quad t_{1,2} = -\sqrt{7} \pm 1,$$

и поради симетрията на x и y в този случай уравнението има 2 решения: $(x; y) = (-\sqrt{7} \pm 1; -\sqrt{7} \mp 1)$.

Оценяване. (6 точки) *Първи метод:* По 1 т. за $x^2 + y^2 = 16$ и $xy = 6$; 2 т. за $x, y \in \{\sqrt{7} \pm 1, -\sqrt{7} \pm 1\}$; 2 т. за намирането на четирите решения. *Втори метод:* по 1 т. за $|x + y| = 2\sqrt{7}$ и $xy = 6$; по 2 т. за всеки от случаите $x + y = \pm 2\sqrt{7}$, минус 1 т., ако е изпусната симетрията $(x; y) \rightarrow (y; x)$. И при двата подхода, ако преобразуванията не са еквивалентни, а само следствени (т.е., $\iff$ е заменено с $\implies$), то се отнема 1 т. при липса на проверка.

Задача 10.2. Даден е неравностранен остроъгълен триъгълник ABC , в който AL ($L \in BC$) е ъглополовящата на $\angle BAC$ и M е средата на BC . Нека ъглополовящите на $\angle AMB$ и $\angle CMA$ пресичат AB и AC съответно в точките P и Q . Да се докаже, че описаната окръжност около триъгълника APQ се допира до BC тогава и само тогава, когато минава през L .

Решение. От свойството на ъглополовящата и факта, че $BM = MC$, получаваме

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AM}{BM} = \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QC}$$

и от теоремата на Талес $PQ \parallel BC$. Следователно $\angle BLP = \angle LPQ = \varphi$. Нека ω е описаната окръжност около триъгълника APQ .

Нека ω се допира до BC в точка L' . Тогава

$$\angle L'QP = \angle BL'P = \angle L'PQ,$$

т.е. L' е средата на дъгата $\widehat{PQ}$ от ω . Следователно AL' е ъглополовящата на $\angle PAQ$, т.е. $L' \equiv L$.

Нека $L \in \omega$. Тогава понеже AL е ъглополовяща на $\angle PAQ$, то $PL = LQ$, откъдето

$$\angle PQL = \angle LPQ = \angle BLP = \varphi.$$

Последното означава, че ω се допира до BC .

Оценяване. (6 точки) 2 т. за $PQ \parallel BC$, по 2 т. за всяка от двете посоки.

Задача 10.3. Да се намерят всички полиноми P с цели коефициенти, за които съществува естествено число N , такова че за всяко $n \geq N$, всеки прост делител на $n + 2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ е делител и на $P(n)$. (Тук $\lfloor x \rfloor$ означава най-голямото цяло число, по-малко или равно на реалното число x .)

Отговор. $P \equiv 0$.

Решение. Очевидно $P \equiv 0$ върши работа. Ще покажем, че други P няма. Да забележим, че $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k$ за всеки две естествени n и k , за които $n \in [k^2, k^2 + 2k]$. Да фиксираме естествено число $m \geq N$ и просто число p . Да положим в горното $k = p - 1 + m$ и да разгледаме интервала $[k^2, k^2 + 2k]$. Той има дължина $2k > p$, следователно в него съществува естествено число $n \equiv -2^m \pmod{p}$. Тогава от теоремата на Ферма получаваме

$$n + 2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} = n + 2^k \equiv -2^m + 2^{p-1+m} \equiv 0 \pmod{p}$$

Следователно $p \mid P(n)$. Понеже P е полином с цели коефициенти,

$$P(-2^m) \equiv P(n) \equiv 0 \pmod{p}$$

Така $p \mid P(-2^m)$ за всяко просто число p . Следователно $P(-2^m) = 0$ за всяко естествено число $m \geq N$. Това значи, че $P \equiv 0$, с което решението е завършено.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за ясната идея за разглеждане на числа n в интервали от вида $[k^2, k^2 + 2k]$, 4 т. за конструиране на двойки $(n; p)$ от посочения вид и доказване на делимостта, 2 т. за довършване.

Задача 10.4. Дадени са пълен ориентиран граф G с 2024 върха и естествено число $k \leq 10^5$. Ангел и Борис играят следаната игра: Ангел оцветява k от ребрата на G в червено и поставя пул в един от върховете на G . След това двамата правят ходове, редувайки се; Ангел започва. На всеки свой ход той премества пула в съседен връх, след което Борис променя ориентацията на някое от ребрата, което не е червено. Ако в някакъв момент Ангел не може да премести пула, то той губи и победител е Борис. Да се определи в зависимост от G и k дали Борис има печеливша стратегия.

Отговор. Борис има печеливша стратегия при $k \leq 2$ и всякакъв граф G , както и при $k \geq 3$, когато в G няма цикли.

Решение. Ще започнем решението със следните две лема.

Лема 1. Нека G е ориентиран граф с n върха, в който няма цикли. Тогава можем да номерираме върховете му с естествените числа от 1 до n така, че ако за някои два върха x и y с номера i и j съответно има ребро $x \rightarrow y$, то непременно $i < j$.

Решение. Ще използваме индукция по n . При $n = 2$ твърдението е тривиално. Нека сега исканото е в сила за всеки граф с по-малко от n върха. Ако допуснем, че от всеки връх в G излиза поне по едно ребро, то бихме получили цикъл, което е противоречие. Значи съществува връх v , от който не излизат ребра. Номериране него с n , а останалите върхове номериране съгласно индуктивната хипотеза за графа $G_1 := G \setminus \{v\}$ (понеже в G няма цикли, то и в G_1 няма). Това гарантира, че условието за ребрата в G_1 се изпълнява. Останалите ребра са от вида $u \rightarrow v$, но номерът на v е най-големият възможен (n), значи и за тях исканото е в сила. С това лемата е доказана.

Лема 2. Нека G е пълен ориентиран граф с n върха, в който има поне един цикъл. Тогава в G има цикъл с дължина 3.

Решение. Да допуснем обратното и да разгледаме цикъл $v_1 v_2 \dots v_k v_1$ с минимална дължина $k \geq 4$. Ако има ребро $v_3 \rightarrow v_1$, то $v_1 v_2 v_3 v_1$ е цикъл с дължина $3 < k$, което е противоречие. Значи имаме реброто $v_1 \rightarrow v_3$; сега обаче $v_1 v_3 \dots v_k v_1$ е цикъл с дължина $k - 1 < k$, което отново е противоречие. Следователно в G има цикъл с дължина 3, с което лемата е доказана.

Сега да пристъпим към решението. Ако $k \geq 3$ и в G има цикъл, то съгласно Лема 2 в G има цикъл C с дължина 3. Значи Ангел може да оцвети C и още произволни $k - 3$ ребра в червено и да постави пула в един от върховете на C . Понеже Борис не може да промени ориентацията на ребрата на този цикъл, то Ангел може да направи неограничен брой ходове, което го прави победител.

Нека сега е вярно, че в G или няма цикъл, или $k \leq 2$. Ще докажем, че и в двата случая Борис може след краен брой промени (възможно нула) да приведе G в граф, който може да бъде номериран със свойството в Лема 1. В първия случай това следва директно от лемата, остава да го проверим за $k \leq 2$. Да разгледаме червените ребра, които Ангел оцветява. Понеже те двете не образуват цикъл, то можем да номериране участващите в тях върхове по желания начин. Останалите върхове в G номериране по произволен начин и докато има ребра от вида $i \rightarrow j$, където $i > j$, Борис променя тяхната ориентация. Така получихме пълен ориентиран граф H с върхове числата от 1 до 2024 и ребра $i \rightarrow j$ за всеки $1 \leq i < j \leq 2024$. Нека след преместването от страна на Ангел пулт се намира във връх n . Разделяме върховете на H на 2 групи по следния начин:

$$A = \{1, 2, \dots, 1000\}; B = \{1001, 1002, \dots, 2024\}.$$

Да забележим, че ако ребрата, излизащи от връха, в който се намира пулт (в случая се намира в n) преди хода на Ангел, са само към такива с по-голям номер, то непременно върхът, в който пулт бива преместен, има по-голям номер. Остава да покажем, че Борис може да поддържа това свойство в сила.

Ребрата между двойка върхове от една и съща група са повече от 10^5 и за двете групи, следователно и в двете групи има поне по едно ребро, което не е червено – нека това са $a = a_1 \rightarrow a_2$ (респективно от върхове в A) и $b = b_1 \rightarrow b_2$ (респективно от върхове в B). Действаме по следния начин:

- ако пулт е във връх от A , променяме b ;
- ако пулт е във връх от $B \setminus \{b_2\}$, променяме a ;
- ако пулт е във b_2 и имаме реброто $b_1 \rightarrow b_2$, променяме a ;
- ако пулт е във b_2 и имаме реброто $b_2 \rightarrow b_1$, променяме b .

Лесно се съобразява, че исканото се изпълнява при тази стратегия.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за пълно описание на случая, в който Ангел печели, 3 т. за пълно описание на случая, в който Борис печели, 1 т. за завършване. При формулиране на стратегията на Ангел според дължината на минималния цикъл на G и отсъствие на Лема 2 се отнемат 2 т.