

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

София, 15-17 ноември 2024 г.

София, 2024 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 11.1. Да се намерят всички реални числа a , за които уравнението

$$x^3 - (a+2)x^2 - (a-2)x + 2a - 1 = 0$$

има три различни корена x_1 , x_2 и x_3 , и тези корени заедно с числото a в някакъв ред образуват аритметична прогресия.

Решение. Тъй като

$$x^3 - (a+2)x^2 - (a-2)x + 2a - 1 = (x-1)(x^2 - (a+1)x - 2a + 1),$$

то $x_1 = 1$, а x_2 и x_3 са корени на $f(x) = x^2 - (a+1)x - 2a + 1 = 0$. Тъй като $x_2 + x_3 = a + 1$, то за дадената аритметична прогресия, с точност до симетрия, има две възможности – $x_2, 1, a, x_3$ или $1, x_2, x_3, a$.

В първия случай $x_2 = 2 - a$ и след заместване в уравнението получаваме

$$f(2-a) = 0 \iff 2a^2 - 7a + 3 = 0$$

с корени $a = 3$ и $a = \frac{1}{2}$.

Във втория случай $d = x_2 - 1$, като $x_2 = \frac{a+2}{3}$ и получаваме

$$f\left(\frac{a+2}{3}\right) = 0 \iff 2a^2 + 23a - 7 = 0,$$

с корени $a = \frac{-23 + \sqrt{585}}{4}$ и $a = \frac{-23 - \sqrt{585}}{4}$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за разлагането $(x-1)(x^2 - (a+1)x - 2a + 1)$; 1 т. за наблюдението, че $x_2 + x_3 = a + 1$ води до разглеждането на само два случая; по 2 т. за пълно решаване на всеки от двата случая.

Задача 11.2. Ъглите при върховете A , B и C на триъгълник ABC са съответно първи, втори и трети член на намаляваща аритметична прогресия. Намерете ъглите на триъгълника, ако $\angle BHI = 60^\circ$, където H и I са съответно ортоцентърът и центърът на вписаната окръжност на триъгълника.

Отговор. $80^\circ, 60^\circ, 40^\circ$.

Решение. Първи метод. От условието следва, че $\angle B = 60^\circ$. Тогава $\angle AIC = 120^\circ$ и ако P е симетричната на I спрямо AC , то $\angle APC = 120^\circ$. Това означава, че P е върху описаната около ABC окръжност. Тъй като симетричната на H спрямо AC също лежи на описаната окръжност (означаваме тази точка с Q), то $QHPI$ е равнобедрен трапец. Следователно $\angle PQH = \angle PIH = 120^\circ$.

Четириъгълникът $QBCP$ е вписан в окръжност, откъдето получаваме $\angle PCB = 180^\circ - \angle BQP = 60^\circ$. Понеже $\angle BCI = \angle ICA = \angle ACP$, получаваме $\angle ACB = 40^\circ$ и $\angle BAC = 80^\circ$.

Втори метод. (Б. Димитров) Ще използваме стандартно означение за ъглите на триъгълника ABC . Тогава от даденото условие получаваме $2\beta = \alpha + \gamma \implies 3\beta = 180^\circ \implies \beta = 60^\circ$. Ще решим задачата за остроъгълен триъгълник (когато $\triangle ABC$ е тъпоъгълен, разсъжденията са аналогични). Имаме $\angle AHC = \angle AIC = 120^\circ$, откъдето четириъгълникът $AHIC$ е вписан. Сега

$$180 - \alpha = \angle BHC = \angle BHI + \angle IHC = 60^\circ + \angle IAC = 60^\circ + \frac{\alpha}{2} \implies \alpha = 80^\circ$$

От последното получаваме $\gamma = 40^\circ$

Оценяване. (6 точки) *Първи метод:* 1 т. за $\beta = 60^\circ$; 1 т. за доказване, че симетричната на I лежи на описаната окръжност; 2 т. за вписания четириъгълник $QBCP$; 2 т. за намиране на ъглите. *Втори метод:* 1 т. за $\beta = 60^\circ$; 2 т. за вписания четириъгълник $AHIC$; 3 т. за намиране на ъглите.

Задача 11.3. Кристи иска да раздаде бонбони на $n \geq 3$ свои съученици. Той разполага всеки от тях върху точка в двора на училището. Точките са в една равнина, като никои три от тях не лежат на една права. За всеки изпъкнал многоъгълник P с върхове сред тези точки, Кристи прави следното. Преброява учениците, които се намират вътре в P или на страните му, нека техният брой е S_P . Той раздава по S_P бонбона на всеки от тези S_P ученици. Ученик, получил най-малко бонбони след всички раздавания, наричаме *нещастен* (нещастните ученици могат да са един или повече). Определете максималното количество бонбони, които може да получи нещастен ученик.

Решение. Нека X е множеството от n точки. За изпъкнал многоъгълник P с върхове в X да означим с $C(P)$ множеството от точки в X , които са вътре или на контура на P . Нека Q е общият брой бонбони, получени от всички ученици, а m е броят бонбони, получени от нещастен ученик. Имаме

$$Q = \sum_P |C(P)|^2 \leq \sum_{A \subset X} |A|^2 = \sum_{k=3}^n k^2 \binom{n}{k}.$$

Първото неравенство е в сила, защото $P \rightarrow C(P)$ е инекция от множеството на изпъкналите многоъгълници с върхове в X към множеството от всички подмножества на X . Използвайки

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1} \text{ и } \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} = 2^m, \text{ пресмятаме:}$$

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k=3}^n k^2 \binom{n}{k} = n \sum_{k=3}^n k \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \sum_{k=3}^n (k-1) \binom{n-1}{k-1} + n \sum_{k=3}^n \binom{n-1}{k-1} \\ &= n(n-1) \sum_{k=3}^n \binom{n-2}{k-2} + n \sum_{k=3}^n \binom{n-1}{k-1} \\ &= n(n-1)(2^{n-2} - 1) + n(2^{n-1} - (n-1) - 1) \\ &= n(n+1)2^{n-2} - 2n(n-1) - n \quad (1). \end{aligned}$$

От (1) следва

$$m \leq (n+1)2^{n-2} - 2n + 1$$

Да разположим сега учениците във върховете на правилен n -ъгълник. Тогава за всяко $A \subset X$, изпъкналата обвивка на A се състои от всички върхове на A . Значи в (1) равенството се достига и $Q = n(n+1)2^{n-2} - n - 2n(n-1)$. От друга страна поради симетрията всеки ученик получава равен брой бонбони и значи $m = Q/n = (n+1)2^{n-2} - 2n + 1$.

Оценяване. (7 точки) 5 т. за доказване оценката отгоре, 2 т. – че тя се достига (примера). При валидна оценка отгоре, но липса на аргументация, че $P \rightarrow C(P)$ е инекция (или еквивалентно разсъждение) се отнема 1 т. Ако формулата за m не е в затворен вид, (т.е. пресмятанията в (1) не са направени) се отнема 1 т.

Задача 11.4. Да се намери най-малкото естествено число n , за което съществуват n две по две различни естествени числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, такива че стойността на израза

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 2025}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

е естествено (т.е. цяло положително) число.

Отговор. $n = 9$.

Решение. Нека означим

$$S = \sum_{i=1}^n a_i; \quad Q = \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Тъй като a_i и a_i^2 са от еднаква четност, то S и Q също са от еднаква четност. Щом Q дели $S^2 - 2025$, то S и Q са нечетни. Но тогава $S^2 - 2025 = (S - 45)(S + 45)$ се дели на 8 и понеже Q е нечетно, получаваме

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 2025}{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \geq 8.$$

От друга страна от неравенството между средно аритметично и средно квадратично имаме:

$$nQ \geq S^2 > S^2 - 2025 \geq 8Q,$$

следователно $n > 8$, значи $n \geq 9$. Ще докажем, че за $n = 9$ е възможно да удовлетворим условията. Искаме да намерим решение на уравнението $S^2 - 2025 = 8Q$, тъй като знаем, че ако изразът има стойност, различна от 8, то $n > 16$. Целейки симетрия, нека положим $(a_1, a_2, a_3) = (x - 1, x, x + 1)$, $(a_4, a_5, a_6) = (y - 1, y, y + 1)$ и $(a_7, a_8, a_9) = (z - 1, z, z + 1)$ за естествени числа x, y и z . Тогава можем да пренапишем уравнението $S^2 - 2025 = 8Q$ като

$$(3x + 3y + 3z)^2 - 2025 = 8(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6).$$

Разделяйки двете страни на 3 и разлагайки лявата страна, получаваме:

$$3(x + y + z - 15)(x + y + z + 15) = 8(x^2 + y^2 + z^2 + 2).$$

От съображения по модул 3 за дясната страна, точно едно от числата x, y и z не е кратно на 3. Нека $x = 3u + 1, y = 3v, z = 3w$ за $u, v, w \in \mathbb{N}$ (избрахме $x = 3u + 1$, но решения могат да се намерят и в случая $x = 3u + 2$). Пренаписвайки уравнението отново, получаваме:

$$(3u + 3v + 3w - 14)(3u + 3v + 3w + 16) = 8(3u^2 + 3v^2 + 3w^2 + 2u + 1).$$

Можем да забележим, че $u \equiv 2 \pmod{3}$, разглеждайки уравнението отново по модул 3. При $u = 2$ уравнението е еквивалентно на

$$3(v - w)^2 + \frac{1}{2}(2v - 7)^2 + \frac{1}{2}(2w - 7)^2 + 55 = 0.$$

Последното няма решения, понеже лявата страна е положителна, а при $u = 5$ намираме $(v; w) = (7; 10)$, което води до решението

$$(a_1, a_2, \dots, a_9) = (15, 16, 17, 20, 21, 22, 29, 30, 31).$$

Оценяване. (7 точки) 5 т. за $n \geq 9$, (1 т. за доказване $n \geq c$, където $c \in [3..8]$); 2 т. за показване, че $n = 9$ е възможен (пример).