

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир ”Академик Стефан Додунеков”

София, 15-17 ноември 2024 г.

София, 2024 г.

Шести клас

Задача 1. В аквариум с форма на правоъгълен паралелепипед имало определено количество вода. При почистване източили 40% от водата. След това добавили филтрирана вода, при което увеличили с 40% количеството вода, останало след източването. Накрая в аквариума имало 2,1 литра вода.

а) Колко литра вода имало в аквариума отначало?

б) Широчината на дъното на аквариума е 20 cm и е с 20% по-малка от неговата дължина. Околната повърхнина на аквариума е $7,2 \text{ dm}^2$. Колко процента от обема на аквариума са били запълнени с вода отначало?

Решение. а) Нека отначало в аквариума е имало x литра вода. След източването са останали $60\%x$ литра, а след доливането на филтрираната вода, в аквариума имало $140\%.60\%x = 84\%x$ литра вода. От равенството $84\%x = 2,1$ намираме $x = 2,5$ литра.

б) Широчината на дъното $a = 20 \text{ cm}$ е с 20% по-малка от дължината b , т.е. е равна на $80\%b$. От равенството $20 = 80\%b$ намираме $b = 25 \text{ cm}$. Обиколката на дъното е $P = 90 \text{ cm}$ и тъй като $S = 7,2 \text{ dm}^2 = 720 \text{ cm}^2$, височината на аквариума е $c = S : P = 720 : 90 = 8 \text{ cm}$.

Обемът на аквариума е $V = 20 \cdot 25 \cdot 8 = 4000 \text{ cm}^3 = 4 \text{ dm}^3$.

Водата отначало е $\frac{2,5}{4} = 62,5\%$ от обема на аквариума.

Оценяване. а) Пълно решение: 3 точки.

Намиране, че крайното количество е 84% от първоначалното – 2 точки.

Определяне на началното количество вода – 1 точка.

Ако се решава като рачешка задача, по 1,5 т. за всяка стъпка.

б) Пълно решение: 3 точки.

Намиране на дължината – 1 точка.

Намиране на височината – 1 точка.

Намиране на обема и определяне на търсения процент – 1 точка.

Задача 2. За дадени числа a, b, c, d означаваме $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$.

Например, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 3 = 2$.

а) Пресметнете сбора

$$S = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 43 & -44 \\ -46 & 45 \end{vmatrix}$$

б) Намерете числото X в равенството

$$\begin{vmatrix} X & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & 4 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} X & \frac{1}{23} \\ \frac{1}{24} & 22 \end{vmatrix} = \frac{11}{12}.$$

Решение. а) Забелязваме, че

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ -c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - (-b) \cdot (-c) = a \cdot d - b \cdot c = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Следователно } S &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 43 & 44 \\ 46 & 45 \end{vmatrix} = \\ &= (0 \cdot 2 - 1 \cdot 3) + (1 \cdot 3 - 2 \cdot 4) + (2 \cdot 4 - 3 \cdot 5) + \cdots + (43 \cdot 45 - 44 \cdot 46) = 0 - 44 \cdot 46 = -2024, \end{aligned}$$

тъй като в получения сбор събираемите, без първото и последното, се разделят на двойки противоположни със сбор 0.

б) Даденото равенство се записва във вида

$$-X - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 2X - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - 3X - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + 4X - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 22X - \frac{1}{23} \cdot \frac{1}{24} = \frac{11}{12}.$$

Имаме

$$-X + 2X - 3X + 4X + \cdots + 22X = (-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \cdots - 21 + 22)X = 11X,$$

тъй като $-1 + 2 = -3 + 4 = \cdots = -21 + 22 = 1$. От друга страна,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{23} \cdot \frac{1}{24} &= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{23} - \frac{1}{24}\right) = \\ &= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right) = -\frac{11}{24}. \end{aligned}$$

$$\text{Получаваме } 11X - \frac{11}{24} = \frac{11}{12}, \text{ откъдето намираме } X = \frac{1}{8}.$$

Оценяване. а) Пълно решение: 2 точки.

б) Пълно решение: 4 точки.

Определяне на коефициента пред X – 1,5 точки.

Пресмятане на телескопичния сбор – 1,5 точки.

Намиране на X – 1 точка.

Задача 3. Даден е триъгълник ABC . На страната AB е отбелязана точка M така, че $AM = \frac{1}{2}AB$; на страната AC е отбелязана точка K така, че $AK = \frac{1}{3}AC$; на страната BC е отбелязана точка L така, че $BL = \frac{1}{4}BC$. Отсечките KL и CM се пресичат в точка O и лицето на четириъгълника $AMOK$ е 36 cm^2 .

Намерете лицето на триъгълника COL и лицето на триъгълника ABC .

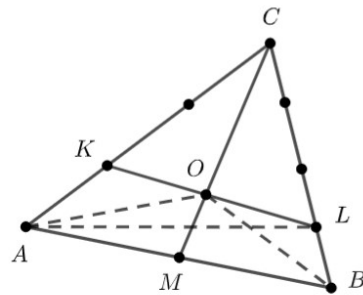
Решение. Ако h_L е разстоянието от L до AC , а h_A е разстоянието от A до BC , имаме

$$\frac{S_{CKL}}{S_{ALC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot CK \cdot h_L}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot h_L} = \frac{CK}{AC} = \frac{2}{3}, \quad \frac{S_{ALC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot CL \cdot h_A}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_A} = \frac{CL}{BC} = \frac{3}{4}$$

и като умножим тези равенства, получаваме

$$\frac{S_{CKL}}{S_{ABC}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Следователно лицето на триъгълника CKL е равно на половината от лицето на триъгълника ABC . От друга страна,



$$\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AM \cdot h_C}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_C} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2},$$

т.е. лицето на триъгълника AMC е равно на половината от лицето на триъгълника ABC (по-нататък ще използваме това свойство на медианата без доказателство).

Следователно $S_{AMC} = S_{CKL}$, т.е.

$$S_{AMOK} + S_{KOC} = S_{KOC} + S_{COL} \iff S_{AMOK} = S_{COL}.$$

Така получихме, че $S_{COL} = 36 \text{ cm}^2$.

$$\text{От } \frac{S_{COB}}{S_{COL}} = \frac{BC}{LC} = \frac{4}{3} \text{ следва, че}$$

$$S_{COB} = \frac{4}{3} S_{COL} = 48 \text{ cm}^2.$$

Тъй като CM е медиана в триъгълника ABC , то $S_{AMC} = S_{BMC}$. Освен това, OM е медиана в триъгълника ABO и $S_{AMO} = S_{BMO}$.

Като извадим почленно двете равенства, получаваме

$$S_{AOC} = S_{COB}, \text{ т.е. } S_{AOC} = 48 \text{ cm}^2.$$

Но $\frac{S_{AOK}}{S_{AOC}} = \frac{AK}{AC} = \frac{1}{3}$, следователно

$$S_{AOK} = \frac{1}{3}S_{AOC} = 16 \text{ cm}^2.$$

Тогава

$$S_{AOM} = S_{AMOK} - S_{AOK} = 36 - 16 = 20 \text{ cm}^2,$$

откъдето и $S_{BMO} = 20 \text{ cm}^2$. Така $S_{ABC} = 2 \cdot (20 + 48) = 136 \text{ cm}^2$.

Оценяване. Доказателство, че лицето на триъгълника CKL е равно на половината от лицето на триъгълника ABC – 2 точки.

Доказателство, че $S_{AMC} = S_{CKL}$ – 1 точка.

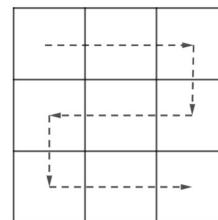
Намиране на лицето на COL – 1 точка.

Намиране на S_{COB} – 1 точка.

Намиране на S_{AOK} – 1 точка,

Намиране на S_{ABC} – 1 точка.

Задача 4. Серпентина ще наричаме квадратна таблица $n \times n$, в която са записани последователни цели числа по следния начин: най-малкото от числата е в горния ляв ъгъл; в първия ред числата нарастват отляво надясно; в последното поле от реда се прави завой към полето под него; във втория ред числата нарастват отдясно наляво и т.н. (Стрелките на фиг. 1 показват реда на попълване на последователните числа в серпентина 3×3 .)



Фиг. 1

При всеки ход се избират две съседни полета в таблицата (т.е. полета с обща страна) и към числата в тях се прибавя едно и също число. На фиг. 2 са показани два поредни хода в таблица 3×3 : при първия ход към числата в сивите квадратчета се прибавя 2, а при втория ход към избраните квадратчета се прибавя (-6) .

-2	-1	0		0	-1	0		0	-1	0
3	2	1	→	5	2	1	→	5	2	1
4	5	6		4	5	6		4	-1	0

Фиг. 2

Една серпентина наричаме **особена**, ако след няколко хода от нея може да се получи таблица, във всички полета на която е записана 0.

- Намерете всички особени серпентини при $n = 5$.
- Съществува ли особена серпентина при $n = 10$?

Решение. Ако оцветим таблицата шахматно, при всеки ход едно бяло и едно черно поле се увеличават или намаляват с едно и също число. Това означава, че разликата между сбора на числата в белите полета и сбора на числата в черните полета се запазва.

- Общият вид на серпентина 5×5 е следният:

$a - 12$	$a - 11$	$a - 10$	$a - 9$	$a - 8$
$a - 3$	$a - 4$	$a - 5$	$a - 6$	$a - 7$
$a - 2$	$a - 1$	a	$a + 1$	$a + 2$
$a + 7$	$a + 6$	$a + 5$	$a + 4$	$a + 3$
$a + 8$	$a + 9$	$a + 10$	$a + 11$	$a + 12$

Сборът на числата в черните полета е $S_b = 13a$, а сборът на числата в белите полета е $S_w = 12a$. След всеки ход се запазва разликата между сбора на числата в черните полета и сбора на числата в белите полета, който отначало е $S_b - S_w = a$.

Следователно ако серпентината 5×5 е особена, то $a = 0$.

Остава да покажем, че при $a = 0$ с няколко хода може да се получи таблица само с 0. В таблицата

-12	-11	-10	-9	-8
-3	-4	-5	-6	-7
-2	-1	0	1	2
7	6	5	4	3
8	9	10	11	12

разделяме полетата по двойки и след 10 хода

$$\begin{aligned}
 &(-12; -11) \rightarrow (0; 1), (-10; -9) \rightarrow (1; 2), (-8; -7) \rightarrow (2; 3), \\
 &(-6; -5) \rightarrow (3; 4), (-4; -3) \rightarrow (4; 5), (-2; -1) \rightarrow (5; 6), \\
 &(7; 8) \rightarrow (0; 1), (9; 10) \rightarrow (1; 2), (5; 4) \rightarrow (2; 1), (3; 12) \rightarrow (2; 11)
 \end{aligned}$$

стигаме до таблица, в която има 11 двойки съседни полета, във всяка от които са записани равни числа:

0	1	1	2	2
5	4	4	3	3
5	6	0	1	2
0	6	2	1	2
1	1	2	11	11

От тук с 11 хода получаваме таблица само с 0.

б) В серпентина 10×10 са записани 100 числа; ако в горния ляв ъгъл е числото $a - 50$, най-голямото число в таблицата $a + 49$ ще е записано в долния ляв ъгъл. Сборът на всички числа в таблицата е $100a - 50$.

Ако оцветим таблицата шахматно така, че $a - 50$ да е в черно поле, сборът на числата в черните полета ще е

$$S_b = (a - 50) + (a - 48) + \dots + (a - 2) + a + (a + 2) + \dots + (a + 48) = 50a - 50,$$

а сборът на числата в белите полета ще е

$$S_w = (100a - 50) - (50a - 50) = 50a,$$

което означава, че $S_w - S_b = 50$ след всеки ход. Това означава, че не съществува особена серпентина 10×10 .

Забележка. По същия начин може да се докаже, че особена серпентина съществува само за нечетно n .

Оценяване. За шахматно оцветяване и съображението, че сборът на числата в черните полета се променя по същия начин като сбора на числата в белите полета $- 1$ т.

а) Доказателство, че в централното квадратче е записана $0 - 2$ точки.

Пример как се стига до таблица само с $0 - 2$ точки.

б) Доказателство, че разликата на сбора на числата в черните полета и сбора на числата в белите полета е ненулева константа $- 2$ точки.