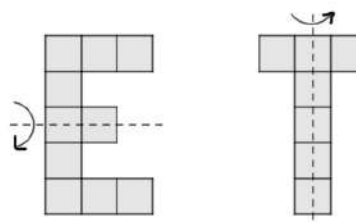


Есенен математически турнир ”Академик Стефан Додунеков”

София, 15-17 ноември 2024 г.

Тема за 7. клас

Задача 1. Фигурите **Е** и **Т** на чертежа са съставени от квадратчета със страна 2 см. Всяка от фигурите се завърта на 360° около оста си на симетрия (означена с пунктир) и се получават ротационните тела P_E и P_T .



- Намерете отношението на лицата на повърхнините на P_E и P_T .
- Машинни детайли с формата и размерите на P_E и P_T се отляти от метална сплав. Намерете съответната им маса, като използвате, че 1 cm^3 от сплавта тежи 7 g и приемете, че $\pi \approx \frac{22}{7}$.

Задача 2. Намерете всички двойки естествени числа $(p; q)$, за които

$$p^2 - q^2 = M,$$

където

$$M = \frac{12^{p-2q} \cdot 75^{6+6q-3p}}{18^{2p-4q-3} \cdot 15^{11-6p+12q}}.$$

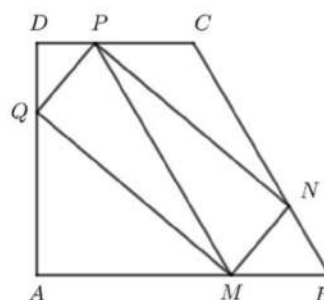
Задача 3. Даден е правоъгълен трапец $ABCD$ с основи AB и CD и прав ъгъл при върха A . В четириъгълника е вписан правоъгълник $MNPQ$, така че M, N, P, Q лежат съответно на страните AB, BC, CD, DA и

$$PD : DQ = DQ : QA = QA : AM = 3 : 4,$$

а диагоналят MP е успореден на BC .

- Намерете отношението $DP : PC$.
- Върху отсечката AM е избрана точка X така, че отсечката AX е равна на 37% от MB . Пресечната точка на отсечките PN и MC е означена с E , а пресечната точка на PX и MQ с F . Докажете, че

$$S_{MEPF} = S_{AXFQ} + S_{MBN} + S_{ENC} + S_{DQP}.$$



Задача 4. За редица от нули и единици са разрешени следните действия:

Действие X: две поредни цифри 01 се заменят с 10. Например,

$$1010 \xrightarrow{X} 1100.$$

Действие Y: две поредни цифри 01 се заменят с 110. Например,

$$1010 \xrightarrow{Y} 11100.$$

а) Започваме от редица A , която се състои от 20 цифри (0 или 1), и последователно прилагаме действие X :

$$A \xrightarrow{X} A_1 \xrightarrow{X} A_2 \text{ и т.н., докато е възможно.}$$

Най-много колко пъти последователно може да се приложи действие X ?
При коя начална редица A се получава това?

б) Започваме от редица B , която се състои от 20 цифри (0 или 1), и последователно прилагаме действие Y :

$$B \xrightarrow{Y} B_1 \xrightarrow{Y} B_2 \text{ и т.н., докато е възможно.}$$

Най-много колко цифри може да има в редица, която е получена по този начин?