

Съюз на математиците в България  
Американска фондация за България  
Фондация Георги Чиликов

---

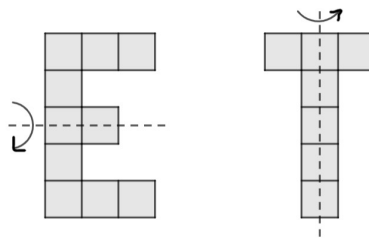
# Есенен математически турнир ”Академик Стефан Додунеков”

София, 15-17 ноември 2024 г.

София, 2024 г.

## Тема за 7. клас

**Задача 1.** Фигурите **Е** и **Т** на чертежа са съставени от квадратчета със страна 2 cm. Всяка от фигурите се завърта на  $360^\circ$  около оста си на симетрия (означена с пунктир) и се получават ротационните тела  $P_E$  и  $P_T$ .



- а) Намерете отношението на лицата на повърхнините на  $P_E$  и  $P_T$ .  
 б) Машинни детайли с формата и размерите на  $P_E$  и  $P_T$  се отляти от метална сплав. Намерете съответната им маса, като използвате, че  $1 \text{ cm}^3$  от сплавта тежи 7 g и приемете, че  $\pi \approx \frac{22}{7}$ .

*Решение.* а) Повърхнината на  $P_E$  се състои от: околната повърхнина на цилиндър с  $r = 5 \text{ cm}$ ,  $h = 6 \text{ cm}$ ; околната повърхнина на цилиндър с  $r = 3 \text{ cm}$ ,  $h = 4 \text{ cm}$ ; околната повърхнина на цилиндър с  $r = 1 \text{ cm}$ ,  $h = 2 \text{ cm}$ ; кръг с  $r = 5 \text{ cm}$ ; кръг с  $r = 1 \text{ cm}$  и два кръгови венца, които общо съставят кръг с  $r = 5 \text{ cm}$ . Следователно

$$S_E = 2\pi \cdot 5 \cdot 6 + 2\pi \cdot 3 \cdot 4 + 2\pi \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot 5^2 = 138\pi \text{ cm}^2.$$

Повърхнината на  $P_T$  се състои от: околната повърхнина на цилиндър с  $r = 3 \text{ cm}$ ,  $h = 2 \text{ cm}$ ; околната повърхнина на цилиндър с  $r = 1 \text{ cm}$ ,  $h = 8 \text{ cm}$ ; кръг с  $r = 3 \text{ cm}$ ; кръг с  $r = 1 \text{ cm}$  и кръгов венец, които общо съставят кръг с  $r = 3 \text{ cm}$ . Следователно

$$S_T = 2\pi \cdot 3 \cdot 2 + 2\pi \cdot 1 \cdot 8 + 2\pi \cdot 3^2 = 46\pi \text{ cm}^2.$$

Намираме  $S_E : S_T = 138\pi : 46\pi = 3 : 1$ .

б) Обемът на  $P_E$  се получава, като се съберат обемите на цилиндър с  $r = 5 \text{ cm}$ ,  $h = 6 \text{ cm}$  и на цилиндър с  $r = 1 \text{ cm}$ ,  $h = 2 \text{ cm}$  и се извади обемът на цилиндър с  $r = 3 \text{ cm}$ ,  $h = 4 \text{ cm}$ , т.е.

$$V_E = \pi \cdot 5^2 \cdot 6 + \pi \cdot 1^2 \cdot 2 - \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 116\pi \text{ cm}^3.$$

Тогава масата на  $P_E$  е приблизително  $116 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7 = 2552 \text{ g}$ .

Обемът на  $P_T$  се получава, като се съберат обемите на цилиндър с  $r = 3 \text{ cm}$ ,  $h = 2 \text{ cm}$  и на цилиндър с  $r = 1 \text{ cm}$ ,  $h = 8 \text{ cm}$ , т.е.

$$V_T = \pi \cdot 3^2 \cdot 2 + \pi \cdot 1^2 \cdot 8 = 26\pi \text{ cm}^3.$$

Тогава масата на  $P_T$  е приблизително  $26 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7 = 572 \text{ g}$ .

**Оценяване.** а) Пълно решение: 3 точки.

б) Пълно решение: 3 точки.

**Задача 2.** Намерете всички двойки естествени числа  $(p; q)$ , за които

$$p^2 - q^2 = M,$$

където

$$M = \frac{12^{p-2q} \cdot 75^{6+6q-3p}}{18^{2p-4q-3} \cdot 15^{11-6p+12q}}.$$

*Решение.* Ако означим  $p - 2q = n$ , имаме

$$\begin{aligned} M &= \frac{12^{p-2q} \cdot 75^{6+6q-3p}}{18^{2p-4q-3} \cdot 15^{11-6p+12q}} = \frac{12^n \cdot 75^{6-3n}}{18^{2n-3} \cdot 15^{11-6n}} = \\ &= \frac{(2^{2n} \cdot 3^n) \cdot (3^{6-3n} \cdot 5^{2(6-3n)})}{(2^{2n-3} \cdot 3^{2(2n-3)}) \cdot (3^{11-6n} \cdot 5^{11-6n})} = \frac{2^{2n} \cdot 3^{6-2n} \cdot 5^{12-6n}}{2^{2n-3} \cdot 3^{5-2n} \cdot 5^{11-6n}} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120. \end{aligned}$$

Тогава

$$p^2 - q^2 = 120 \iff (p - q)(p + q) = 120.$$

Множителите  $p - q$  и  $p + q$  са с еднаква четност, като  $p - q < p + q$ . Тъй като произведението е четно, то  $p - q$  и  $p + q$  са четни числа. Числото 120 може да се представи като произведение на две четни числа по четири начина ( $2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = 10 \cdot 12$ ) и получаваме следните възможности:

1. случай.  $p - q = 2$  и  $p + q = 60$ , откъдето  $p = 31$  и  $q = 29$  са решение;
2. случай.  $p - q = 4$  и  $p + q = 30$ , откъдето  $p = 17$  и  $q = 13$  са решение;
3. случай.  $p - q = 6$  и  $p + q = 20$ , откъдето  $p = 13$  и  $q = 7$  са решение;
4. случай.  $p - q = 10$  и  $p + q = 12$ , откъдето  $p = 11$  и  $q = 1$  са решение.

**Оценяване.** Намиране на  $M$  – 3 точки.

Намиране на двойките решения – 3 точки.

**Задача 3.** Даден е правоъгълен трапец  $ABCD$  с основи  $AB$  и  $CD$  и прав ъгъл при върха  $A$ . В четириъгълника е вписан правоъгълник  $MNPQ$ , така че  $M, N, P, Q$  лежат съответно на страните  $AB, BC, CD, DA$  и

$$PD : DQ = DQ : QA = QA : AM = 3 : 4,$$

а диагоналят  $MP$  е успореден на  $BC$ .

а) Намерете отношението  $DP : PC$ .

б) Върху отсечката  $AM$  е избрана точка  $X$  така, че отсечката  $AX$  е равна на 37% от  $MB$ . Пресечната точка на отсечките  $PN$  и  $MC$  е означена с  $E$ , а пресечната точка на  $PX$  и  $MQ$  с  $F$ . Докажете, че

$$S_{MEPF} = S_{AXFQ} + S_{MBN} + S_{ENC} + S_{DQP}.$$

*Решение.* От  $PD = 3k$ ,  $DQ = 4k$  по Питагорова теорема за триъгълника  $DPQ$  получаваме  $QP^2 = (3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$ , т.е.  $QP = 5k$ .

Аналогично, от  $QA = 3n$ ,  $AM = 4n$  намираме  $QM = 5n$ .

Тъй като  $DQ : QA = 3 : 4$ , то

$$\frac{4k}{3n} = \frac{3}{4} \iff k : n = 9 : 16.$$

Изразяваме  $S_{MNPQ} = 5k \cdot 5n = 25kn$  и  $S_{MNP} = \frac{1}{2}S_{MNPQ} = \frac{25}{2}kn$ .

Тъй като  $PM$  е успоредна на  $BC$  и  $AB$  е успоредна на  $CD$ , то  $MBCP$  е успоредник. Тогава

$$S_{MNP} = \frac{1}{2} \cdot MP \cdot h_{MP} = \frac{1}{2} \cdot S_{MBCP}$$

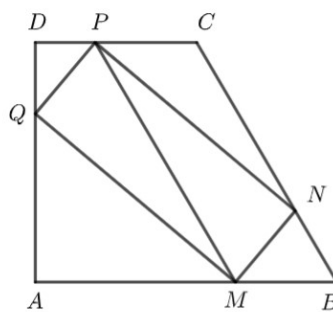
и получаваме, че  $S_{MBCP} = 2S_{MNP} = 25kn$ .

От друга страна,  $S_{MBCP} = PC \cdot AD$  и тъй като

$$AD = 4k + 3n = 4 \cdot \frac{9}{16}n + 3n = \frac{21}{4}n,$$

от равенството  $25kn = PC \cdot \frac{21}{4}n$  намираме  $PC = \frac{100}{21}k$ . Тогава

$$DP : PC = 3 : \frac{100}{21} = 63 : 100.$$



б) Имаме  $AX = 37\%MB = 37\%PC = 37\% \cdot \frac{100}{21}k = \frac{37}{21}k$ .

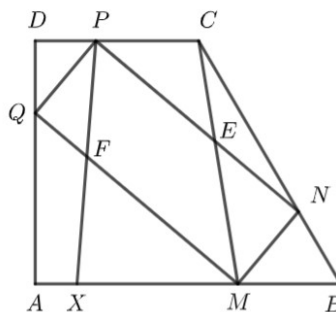
Равенството

$$S_{MEPF} = S_{AXFQ} + S_{MBN} + S_{ENC} + S_{DQP}$$

е еквивалентно на

$$S_{MNPQ} = S_{AXPD} + S_{MBC}$$

(получава се, като се прибави към двете страни на равенството  $S_{FPQ} + S_{MNE}$ ). Но



$$S_{AXPD} + S_{MBC} = \frac{AX + DP}{2} \cdot AD + \frac{MB}{2} \cdot AD = \frac{AX + DP + MB}{2} \cdot AD =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{37}{21}k + 3k + \frac{100}{21}k \right) \cdot \frac{21}{4}n = \frac{1}{2} \cdot \frac{200}{21}k \cdot \frac{21}{4}n = 25kn = S_{MNPQ},$$

което искахме да докажем.

**Оценяване.** а) Пълно решение: 5 точки.

Изразяване на  $PD$ ,  $DQ$ ,  $QA$ ,  $AM$  – 1 точка.

Прилагане на Питагоровата теорема и изразяване на страните и лицето на правоъгълника – 2 точки.

Доказателство, че лицето на успоредника  $MBCP$  е равно на лицето на правоъгълника – 1 точка.

Изразяване на  $PC$  и намиране на търсеното отношение – 1 точка.

б) Пълно решение: 2 точки.

Свеждане на даденото равенство до  $S_{MNPQ} = S_{AXPD} + S_{MBC} - 1$  точка.

Доказване на това равенство – 1 точка.

**Задача 4.** За редица от нули и единици са разрешени следните действия:

*Действие X:* две поредни цифри 01 се заменят с 10. Например,  

$$1010 \xrightarrow{X} 1100.$$

*Действие Y:* две поредни цифри 01 се заменят с 110. Например,  

$$1010 \xrightarrow{Y} 11100.$$

а) Започваме от редица  $A$ , която се състои от 20 цифри (0 или 1), и последователно прилагаме действие  $X$ :

$$A \xrightarrow{X} A_1 \xrightarrow{X} A_2 \text{ и т.н., докато е възможно.}$$

Най-много колко пъти последователно може да се приложи действие  $X$ ? При коя начална редица  $A$  се получава това?

б) Започваме от редица  $B$ , която се състои от 20 цифри (0 или 1), и последователно прилагаме действие  $Y$ :

$$B \xrightarrow{Y} B_1 \xrightarrow{Y} B_2 \text{ и т.н., докато е възможно.}$$

Най-много колко цифри може да има в редица, която е получена по този начин?

*Решение.* а) Нека в редицата  $A$  има  $a$  цифри 0 и  $20 - a$  цифри 1.

Към всяка двойка 0 и 1 в  $A$  действието  $X$  може да се приложи най-много веднъж (защото след това тази нула минава вдясно от единицата). Двойките 0 и 1 в редицата  $A$  са  $a(20 - a)$  на брой. Следователно действието  $X$  може да се приложи най-много  $a(20 - a)$  пъти. Тази стойност се реализира при  $A = \underbrace{0 \dots 0}_a \underbrace{1 \dots 1}_{20-a}$ :

$$\begin{aligned} \underbrace{0 \dots 0}_a \underbrace{1 \dots 1}_{20-a} &\xrightarrow{X} \underbrace{0 \dots 0}_{a-1} 10 \underbrace{1 \dots 1}_{19-a} \xrightarrow{X} \underbrace{0 \dots 0}_{a-2} 100 \underbrace{1 \dots 1}_{19-a} \xrightarrow{X} \dots \xrightarrow{X} \\ 1 \underbrace{0 \dots 0}_a \underbrace{1 \dots 1}_{19-a} &\xrightarrow{X} \dots \xrightarrow{X} 11 \underbrace{0 \dots 0}_a \underbrace{1 \dots 1}_{18-a} \xrightarrow{X} \dots \xrightarrow{X} \underbrace{1 \dots 1}_{20-a} \underbrace{0 \dots 0}_a. \end{aligned}$$

Броят на действията  $X$  в редица с  $a$  цифри 0 и  $20 - a$  цифри 1 е най-много

$$a(20 - a) = 100 - (a - 10)^2 \leq 100,$$

т.е. е най-много 100, като тази стойност се достига при  $a = 10$  и  $A = \underbrace{0 \dots 0}_{10} \underbrace{1 \dots 1}_{10}$ .

б) Нека вляво от дадена цифра 1 има  $k$  цифри 0. Това поражда следните последователни действия  $Y$ :

$$\begin{aligned} \underbrace{0 \dots 0}_k 1 &\xrightarrow{Y} \underbrace{0 \dots 0}_{k-1} 110 \xrightarrow{Y} \underbrace{0 \dots 0}_{k-2} 11010 \xrightarrow{Y} \underbrace{0 \dots 0}_{k-2} 111100 \xrightarrow{Y} \\ \underbrace{0 \dots 0}_{k-3} 11011100 &\xrightarrow{Y} \underbrace{0 \dots 0}_{k-3} 111101100 \xrightarrow{Y} \underbrace{0 \dots 0}_{k-3} 1111110100 \xrightarrow{Y} \end{aligned}$$

$$\underbrace{0 \dots 0}_{k-3} \underbrace{11111111}_{2^3} 000 \xrightarrow{Y} \dots \xrightarrow{Y} \underbrace{1 \dots 1}_{2^k} \underbrace{0 \dots 0}_k$$

Ако в редицата има  $b$  цифри 0 и  $c = 20 - b$  цифри 1, най-дългата възможна редица е с дължина  $c \cdot 2^b + b$ . Ако увеличим броя на единиците до  $c + 1$  и нулите станат  $b - 1$ , получаваме максимална дължина  $(c + 1) \cdot 2^{b-1} + b - 1$ . Тъй като

$$c \cdot 2^b + b = 2c \cdot 2^{b-1} + b > (c + 1) \cdot 2^{b-1} + b - 1,$$

следва, че с увеличаване на броя на единиците, максималната дължина на редиците намалява.

Следователно най-дълга редица се получава, когато  $c = 1$  и  $b = 19$ .

Получихме, че с действие  $Y$  може да се получи редица с най-много  $2^{19} + 19$  цифри.

**Оценяване.** а) Пълно решение: 2 точки.

За посочване на верен отговор за максимален брой ходове – 0,5 точки.

Посочване на примера, при който се достига максимумът – 0,5 точки.

Доказателство – 1 точка.

б) Пълно решение: 5 точки.

За посочване на верен отговор за максималната дължина – 1 точка.

Посочване на примера, при който се достига най-голяма дължина на редицата – 1 точка.

Доказателство – 3 точки.