

Съюз на математиците в България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир
София, 15 ноември 2025 г.

Задача 10.1. Едно уравнение ще наричаме *интересно*, ако съществува реално число c , такова че за всеки реален корен на уравнението x_0 е в сила:

$$\sqrt{c + \frac{1}{x_0}} = \sqrt{c^2 - x_0^2}.$$

- а) Докажете, че уравнението $x^3 - 1 = 0$ е интересно.
б) Намерете за кои стойности на параметъра a уравнението

$$x^4 - x^3 + ax^2 + (1 - a)x - 1 = 0$$

има поне два реални корена и е интересно.

Задача 10.2. Даден е триъгълник ABC с описана окръжност ω . Нека вътрешната и външната ъглополовяща на ъгъл ACB пресичат правата AB съответно в точки D и E . Точки I и K лежат на правата AC (K е между A и I) и са такива, че $DI = DC$ и $EC = EK$. Докажете, че правите EK и CD се пресичат върху ω тогава и само тогава, когато правите EK и DI се пресичат върху ω .

Задача 10.3. В равнината са дадени 46 точки. Сумата от всевъзможните разстояния между тях е 2025. Да се докаже, че съществува затворена начупена линия, минаваща през всяка точка точно по веднъж, с дължина най-много 90.

Задача 10.4. Дадени са две ненулеви цели числа m и n , които са взаимно прости. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, такива че:

$$f(m.x + n.y) = mf(f(x)) + nf(f(y))$$