

Задача 10.1. Едно уравнение ще наричаме *интересно*, ако съществува реално число c , такова че за всеки реален корен на уравнението x_0 е в сила:

$$\sqrt{c + \frac{1}{x_0}} = \sqrt{c^2 - x_0^2}.$$

- а) Докажете, че уравнението $x^3 - 1 = 0$ е интересно.
 б) Намерете за кои стойности на параметъра a уравнението

$$x^4 - x^3 + ax^2 + (1 - a)x - 1 = 0$$

има поне два реални корена и е интересно.

Решение. а) $x^3 - 1 = 0$ има единствен реален корен $x = 1$. Значи за него трябва да е изпълнено условието: $c + 1 = c^2 - 1 \implies (c + 1)(c - 2) = 0$, т.е. $c = 2$ или $c = -1$. И за двете стойности на c подкоренните величини са неотрицателни, така че уравнението със сигурност е интересно.

б) Разлагаме уравнението до следния вид: $(x - 1)(x^3 + ax + 1) = 0$. Отново имаме корен 1 и от а) следва, че $c \in \{2, -1\}$. Нека сега x_0 е корен на $x^3 + ax + 1 = 0$ (по условие, а и по принцип винаги съществува за уравнение от трета степен). Значи $x_0^3 = -ax_0 - 1$. Използвайки равенството в условието, трябва да е в сила, че: $c + \frac{1}{x_0} = c^2 - x_0^2 \iff \frac{x_0^3 + 1}{x_0} = c^2 - c \iff \frac{-ax_0 - 1 + 1}{x_0} = 2 \implies a = -2$.

Остава да проверим дали за всеки корен на уравнението $(x - 1)(x^3 - 2x + 1) = 0$ подкоренните величини са неотрицателни. Имаме

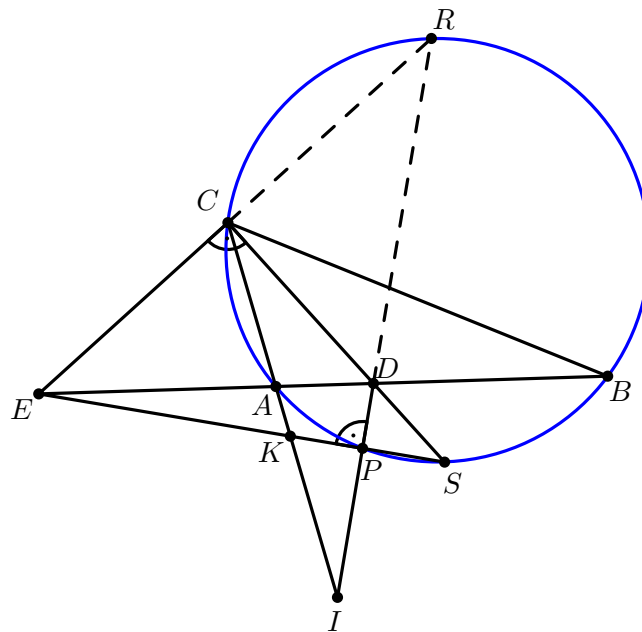
$$(x - 1)(x^3 - 2x + 1) = 0 \iff (x - 1)^2(x^2 + x - 1) = 0 \iff x \in \left\{1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}.$$

При $c = 2$ това е изпълнено и следователно $a = -2$ е единствената стойност, за която даденото уравнение е интересно.

Оценяване. (6 точки) а) 1 т. за $c = 2$ или $c = -1$; 1 т. за проверка на подкоренните величини; б) 1 т. за разлагането и $c \in \{2, -1\}$; 1 т. за $a = -2$; 1 т. за пресмятане на корените; 1 т. за проверка на дефиниционната област.

Задача 10.2. Даден е триъгълник ABC с описана окръжност ω . Нека вътрешната и външната ъглополовяща на ъгъл ACB пресичат правата AB съответно в точки D и E . Точки I и K лежат на правата AC (K е между A и I) и са такива, че $DI = DC$ и $EC = EK$. Докажете, че правите EK и CD се пресичат върху ω тогава и само тогава, когато правите EK и DI се пресичат върху ω .

Решение. Нека $DI \cap EK = P$, а $CD \cap EK = S$.



(*Първи начин*) Нека допуснем, че $S \in \omega$. Тогава е в сила, че $SA = SB$. Пресмятаме $\angle EPD = \angle PKI + \angle PIK = \angle EKC + \angle DIC = \angle ECK + \angle DCI = 90^\circ$ и следователно $DPEC$ е вписан четириъгълник, т.е. $SD \cdot SC = SP \cdot SE$. Но от $\triangle SAD \sim \triangle SCA$ знаем, че $SD \cdot SC = SA^2 = SB^2$. Следователно $SP \cdot SE = SA^2 = SB^2$, т.е. $\triangle SEA \sim \triangle SAP$ и $\triangle SEB \sim \triangle SBP$. Тогава $\angle SEA = \angle PAS$ и $\angle SEB = \angle PBS$. Но $\angle SEA = \angle SEB$, следователно $\angle PAS = \angle PBS$ и P, S, B, A лежат на една окръжност, която е ω . Нека сега $P \in \omega$. Тогава $\angle DPC = \angle DEC = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma - \beta$, $\angle CPB = \angle CAB = \alpha$. Следователно $\angle BPS = \frac{1}{2}\gamma = \angle BCS$ и $S \in \omega$.

(*Втори начин*) Нека $DI \cap EC = R$ и ℓ е допирателната към ω в точка C . Ще докажем, че описаните окръжности около $\triangle CRS$ и $\triangle ABC$ се допират вътрешно в точка C . От $DP \perp EP$ и $DC \perp EC$ следва, че $SRCP$ и $DPEC$ са вписани четириъгълници, т.е.

$$\angle CRS = \angle CPE = \angle CDE = \angle ABC + \angle BCD = \angle(\ell, AC) + \angle ACD = \angle(\ell, CD).$$

Но последното означава, че ℓ се допира и до описаната около $\triangle CRS$ окръжност ω' . Следователно всяко едно от условията $S \in \omega$ или $P \in \omega$ е еквивалентно на $\omega \equiv \omega'$ и твърдението е доказано.

Оценяване. (6 точки) (*Първи начин*) ($\rightarrow$) 1 т. за $DPEC$ вписан и $SP.SE = SD.SC$; 1 т. за $SD.SC = SA^2 = SB^2$; 2 т. за $\angle PAS = \angle PEA = \angle PBS$ и $P \in \omega$; ($\leftarrow$) 1 т. за $\angle BPS = \frac{1}{2}\gamma$; 1 т. за $S \in \omega$. (*Втори начин*) 2 т. за построяването на точка R и свеждане на задачата до доказване на факта, че описаната окръжност около $\triangle CRS$ се допира до ω ; 1 т. за $SRCP$ и $DPEC$ вписани; 3 т. за довършване.

Задача 10.3. В равнината са дадени 46 точки. Сумата от всевъзможните разстояния между тях е 2025. Да се докаже, че съществува затворена начупена линия, минаваща през всяка точка точно по веднъж, с дължина най-много 90.

Решение. (*Първи начин*) Ще докажем задачата в общ случай, а именно - ако имаме N точки и сума S , не е възможно всяка затворена начупена линия да е с дължина повече от $\frac{2S}{N-1}$. Да допуснем, че е така.

Първо, броят на затворените начупени линии е $\frac{(N-1)!}{2}$, защото ако номерираме точките от 1 до N , всяка затворена линия е пермутация на тези числа. Тъй като е затворена, трябва да разделим на N и тъй като имаме и две посоки на обхождане, делим и на 2. Значи сумата от всички начупени линии е повече от $\frac{(N-1)!}{2} \cdot \frac{2S}{N-1} = S \cdot (N-2)!$. От друга страна, можем да преброим всяка отсечка в колко начупени затворени линии участва. Този брой е точно $(N-2)!$, което можем да обосновем по следния начин. Търсим броя на пермутациите, в които числата a и b са едно до друго. Този брой е $2 \cdot (N-1)!$. Сега делим отново на $2 \cdot (N-1)$ заради посоката и затвореността. Значи сумата от всички начупени линии е $S \cdot (N-2)!$ - противоречие.

(*Втори начин*) Ще докажем с индукция по N , че при N точки съществува Хамилтонов цикъл с дължина не повече от $2S_N/(N-1)$, където S_N е сумата на всички разстояния между N -те точки. Базата на индукцията при $N=3$ е тривиална.

Да допуснем, че това е вярно за всеки $N-1$ точки, $N \geq 4$. Да вземем произволни N точки. Фиксираме една, да я кръстим X_0 . За останалите $N-1$ точки прилагаме индукционното предположение. Т.е., съществува цикъл $X_1X_2 \dots X_{N-1}X_1$ с обща дължина $S' \leq 2S_{N-1}/(N-2)$, където S_{N-1} е сумата от разстоянията м/у всеки две

от точките $\{X_1, X_2, \dots, X_{N-1}\}$. Да означим $\Delta S := \sum_{i=1}^{n-1} X_0X_i$. Имаме

$$\min_i (X_0X_i + X_0X_{i+1} - X_iX_{i+1}) \leq \frac{1}{N-1} \left(2 \sum_{i=1}^{N-1} X_0X_i - S' \right) = \frac{2\Delta S}{N-1} - \frac{S'}{N-1}.$$

Следователно

$$\begin{aligned}\min_i (X_0 X_{i+1} X_{i+2} \dots X_i X_0) &= \min_i (X_0 X_i + X_0 X_{i+1} - X_i X_{i+1}) + S' \\ &\leq \frac{2\Delta S}{N-1} - \frac{S'}{N-1} + S' = \frac{2\Delta S}{N-1} + \frac{N-2}{N-1} S' \\ &\leq \frac{2\Delta S}{N-1} + \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{2S_{N-1}}{N-2} = \frac{2\Delta S + 2S_{N-1}}{N-1} \\ &= \frac{2S_N}{N-1}.\end{aligned}$$

Оценяване. (7 точки) 1 т. за правилно обобщение на твърдението. В случай, че това се прави последно или не се прави, точката се прехвърля при довършване; 1 т. за разглеждане на подход със сумиране; 2 т. за преброяване на броя на затворените начупени линии с обосновка (обосновката е 1 точка); 2 т. за преброяване на броя срещания на всяка отсечка с обосновка; 1 т. за довършване.

Задача 10.4. Дадени са две ненулеви цели числа m и n , които са взаимно прости. Да се намерят всички функции $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, такива че:

$$f(mx + ny) = mf(f(x)) + nf(f(y))$$

Решение. (*Първи начин*) Нека положим $g(x) = f(f(x))$. Тогава

$$f(mx) = mg(x) + ng(0) \quad (1)$$

От друга страна $mx = m(x + nt) - nmt$ и можем да заместим. Получаваме, че за всяко t и всяко x :

$$f(mx) = mg(x + nt) + ng(-mt) \quad (2)$$

Приравнявайки (1) и (2) и замествайки $t = 1$, получаваме:

$$mg(x + n) + ng(-m) = mg(x) + ng(0) \iff g(x + n) - g(x) = \frac{n}{m}(g(0) - g(-m)) \quad (3)$$

Дясната страна не зависи от x , значи получаваме, че $g(x + n) - g(x) = C_1$. Аналогично получаваме, че $g(x + m) - g(x) = C_2$. Но $g(mn) = g(0) + mC_1 = g(0) + nC_2$, откъдето $C_2 = \frac{m}{n}C_1$. Сега, от Безу следва, че има числа p, q , такива че $1 = mp + nq$. Получаваме следната връзка:

$$g(x + 1) = g(x + mp + nq) = g(x + mp) + qC_1 = g(x) + pC_2 + qC_1.$$

Значи $g(x)$ е линейна функция. т.е. $f(f(x)) = ax + b$. Връщаме се в условието на задачата: $f(mx + ny) = m(ax + b) + n(ay + b) = a(mx + ny) + b(m + n)$. Но всяко едно число може да се представи във вида $z = mx + by$, така че $f(z) = az + b(m + n)$ за всяко z .

Значи, замествайки във $f(f(x)) = ax + b$, получаваме, че $f(ax + b(m + n)) = a^2x + ab(m + n) + b(m + n) \implies a^2x + ab(m + n) + bm + bn = ax + b$.

Тъй като това е равенство за всяко x , имаме, че $a^2 = a$ и $ab(m + n) + b(m + n) = b$.
Имаме два случая: $a = 0$ или $a = 1$:

- $a = 0 \implies b(m+n) = b$. Ако $m+n = 1$, тогава $f(x) \equiv C$, а ако не, то $f(x) \equiv 0$.
- $a = 1 \implies 2b(m+n) = b$. Следователно $b = 0$ и $f(x) = x$.

Отговор: Ако $m+n = 1$, то $f(x) = C$ или $f(x) = x$; Ако $m+n \neq 1$, то $f(x) = 0$ или $f(x) = x$;

(Втори начин) Последователно имаме, че

1. $P(x, y) = (x, 0) \Rightarrow f(mx) = mf(f(x)) + nf(f(0))$
2. $P(x, y) = (0, x) \Rightarrow f(nx) = nf(f(x)) + mf(f(0))$
3. $P(0, 0) \Rightarrow f(0) = (m+n)f(f(0))$
4. $f(mx + ny) = f(mx) + f(ny) - f(0)$

От последното с индукция x следва, че

$$f(mnx) = x(f(mn) - f(0)) + f(0) \forall x \in \mathbb{Z}$$

Да отбележим също, че 1. $\Rightarrow f(mx) \equiv nf(f(0)) \equiv (m+n)f(f(0)) \equiv f(0) \pmod{m}$ и 2. $\Rightarrow f(nx) \equiv f(0) \pmod{n}$, т.е $f(mn) \equiv f(0) \pmod{mn}$, т.е $f(mn) - f(0) = mna$ за някое $a \in \mathbb{Z}$, т.к $(m, n) = 1$.

Така получаваме, че (5) $f(mnx) = amnx + f(0)$ за $x \in \mathbb{Z}$.

От (1), (3) и (5) имаме, че

$$\begin{aligned} amnx + f(0) &= f(mnx) = mf(f(nx)) + nf(f(0)) \\ amnx &= mf(f(nx)) - mf(f(0)) \\ f(f(nx)) &= anx + f(f(0)) \end{aligned}$$

и аналогично

$$f(f(mx)) = amx + f(f(0)).$$

Сега замествайки в (1) получаваме

$$\begin{aligned} amx + f(f(0)) &= f(f(mx)) = f(mf(f(x)) + nf(f(0))) = mf^{(4)}(x) + nf^{(4)}(0) \\ f^{(4)}(x) &= ax + b, \end{aligned}$$

където $b = (f(f(0)) - nf^{(4)}(0))/m$. Сега, замествайки в равенството от условието получаваме

$$\begin{aligned} f(f(mx + ny)) &= f(mf(f(x)) + nf(f(y))) = mf^{(4)}(x) + nf^{(4)}(y) \\ &= a(mx + ny) + b(m + n) \end{aligned}$$

От Безу, т.к $(m, n) = 1$ получаваме, че $f(f(x)) = ax + b$ за $x \in \mathbb{Z}$ и решението се довършва, както горното с директна проверка.

Оценяване. (7 точки) 5 т. за линейност на $f(f(x))$, от които 2 т. за подходящи субституции, водещи към прогрес като (1) и (2) в първото решение и (1), (2), (3) и (4) във второто решение; 2 т. за довършване, ако $f(f(x))$ е линейна, като 1 т. се дава за изчерпателен отговор.