

Съюз на математиците в България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир
София, 15 ноември 2025 г.

Задача 11.1. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H . Върху страната BC е избрана произволна точка D . Нека перпендикулярът от D към BC пресича BH и CH в съответно точките X и Y . Ако H_1 е ортоцентърът на триъгълника HXY , да се докаже, че A , H_1 и D лежат на една права.

Задача 11.2. Дадена е аритметична прогресия от положителни числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, за която са изпълнени условията:

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = 9.$$

Дадено е, че a_1 е корен на уравнението

$$2x^2 - 13x + 36 = \sqrt{x}(11x - 36).$$

Намерете броя на числата в аритметичната прогресия.

Задача 11.3. С P_n , $n \geq 3$ означаваме правилен n -ъгълник, всеки два върха на който са свързани с отсечка. Едно естествено число $k \geq 2$ ще наричаме *лабилно*, ако за някое $n \geq 3$, съществува оцветяване на отсечките в P_n в точно k цвята, така че за всяко подмножество X от върхове на P_n , точният брой на цветовете, в които са оцветени отсечките, свързващи двойките върхове от X , **не** е равен на $k - 1$. Да се намерят всички лабилни числа k .

Задача 11.4. Дадена е редицата от естествени числа $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, като за всяко $m \in \mathbb{N}$ са изпълнени условията:

- ако $a_i \equiv a_j \pmod{m}$ за някои $i, j \in \mathbb{N}$, то $a_{i+1} \equiv a_{j+1} \pmod{m}$
- ако $a_i \equiv 0 \pmod{m}$ за някое $i \in \mathbb{N}$, то $a_{i+1} \equiv 0 \pmod{m}$.

Докажете, че за всеки $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}$ съществува $n \in \mathbb{N}$ такова, че

$$n + a_n \equiv b \pmod{a}.$$