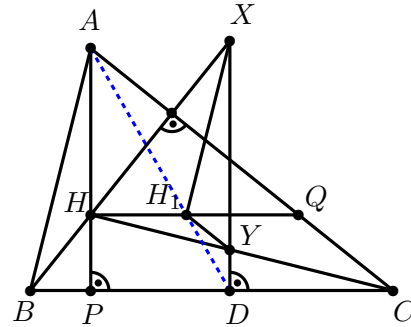


Задача 11.1. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H . Върху страната BC е избрана произволна точка D . Нека перпендикулярът от D към BC пресича BH и CH в съответно точките X и Y . Ако H_1 е ортоцентърът на триъгълника HXY , да се докаже, че A , H_1 и D лежат на една права.

Решение. (*Първи начин*) Нека без загуба на общност да допуснем, че D лежи на отсечката PC , където P е петата на височината от A към BC . И нека правата HH_1 пресича правата AC в точка Q . От $YH_1 \perp BH$ и $CQ \perp BH$ следва, че $H_1Y \parallel CQ$. Сега от Талес имаме, че $\frac{HH_1}{HQ} = \frac{HY}{HC}$. От друга страна $HP \parallel YD$, защото и двете са перпендикулярни на BC . Отново от Талес получаваме, че $\frac{HY}{HC} = \frac{PD}{PC}$. Следователно $\frac{HH_1}{HQ} = \frac{PD}{PC} = \frac{HY}{HC}$.



Като добавим и факта, че $HQ \parallel PC$, защото и двете са перпендикулярни на AH , получаваме, че A , H_1 и D лежат на една права.

(*Втори начин*) Нека без ограничение D и B лежат в различни полуравнини спрямо AH и $AH \cap BC = P$, $HH_1 \cap XY = R$. Понеже $AH \parallel DR$, от теоремата на Талес исканото е еквивалентно на $\frac{AH}{HH_1} = \frac{RD}{RH_1}$. Тъй като $HPDR$ е правоъгълник, то $DR = HP$ и свеждаме до доказването на $\frac{AH}{HP} = \frac{HH_1}{RH_1}$. Обаче $\angle H_1YX = \angle DPC = 90^\circ - \angle DCP = \angle ABC$ и аналогично $\angle HXY = \angle ACB$, следователно $\triangle ABC \sim \triangle HXY$ и желаното равенство представлява съответни елементи в тези триъгълници.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за забелязване, че H_1 е пресечна точка на правата AD и правата през H успоредна на BC ; 4 т. за довършване.

Задача 11.2. Дадена е аритметична прогресия от положителни числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, за която са изпълнени условията:

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = 9.$$

Дадено е, че a_1 е корен на уравнението

$$2x^2 - 13x + 36 = \sqrt{x}(11x - 36).$$

Намерете броя на числата в аритметичната прогресия.

Отговор: $n = 73$

Решение. По метода на Хорнер разлагаме

$$2x^2 - 11x\sqrt{x} - 13x + 36\sqrt{x} + 36 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 6)(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} + 3) = 0.$$

Поради факта, че $\sqrt{x}$ е неотрицателно, решенията на това уравнение са $x = 36$ и $x = 4$, тоест имаме двата случая $a_1 = 36$ и $a_1 = 4$.

Нека разликата на аритметичната прогресия да е d . Непосредствено се вижда, че при $d = 0$ няма константна аритметична прогресия удовлетворяваща дадените условия. Нататък считаме, че $d \neq 0$. От

$$\frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \right) = \frac{1}{d} \cdot \frac{a_{i+1} - a_i}{a_i \cdot a_{i+1}} = \frac{1}{a_i \cdot a_{i+1}},$$

следва

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \\ & \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{d} \frac{a_n - a_1}{a_1 \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n} \end{aligned}$$

Освен това, да забележим, че

$$\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{d},$$

от което получаваме

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \\ & \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{d} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{d} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{d} = \\ & \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d} \cdot \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} = \frac{a_n - a_1}{d(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n})} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} \end{aligned}$$

Значи имаме: $\frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} = 9$ и $\frac{n-1}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{2}$. Като разделим тези равенства и положим $a_n = t^2$ ($t \geq 0$) ще получим, че

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_n &= 18 \cdot (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}) \\ a_1 \cdot t^2 &= 18t + 18\sqrt{a_1} \\ a_1 \cdot t^2 - 18t - 18\sqrt{a_1} &= 0 \\ t &= \frac{18 \pm \sqrt{18^2 + 4a_1 \cdot 18\sqrt{a_1}}}{2a_1} \end{aligned}$$

Решаваме уравнението за двете възможни стойности: $a_1 = 4$ и $a_1 = 36$ и получаваме съответно $t = 6$, $t = -\frac{3}{2}$ и $t = 2$, $t = -\frac{3}{2}$. Тъй като $t \geq 0$, единствено възможно е

$a_n = 36$ и $a_n = 4$. В двата случая получаваме еднакви краища на аритметичната прогресия. Освен това знаем, че $\frac{n-1}{a_1 a_2} = \frac{n-1}{4 \cdot 36} = \frac{n-1}{144} = \frac{1}{2}$, следователно и в двата случая аритметичната прогресия има 73 члена, а разликата ѝ е $\frac{4}{9}$ при $a_1 = 4$ и $-\frac{4}{9}$ при $a_1 = 36$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за намиране $a_1 = 4$ или $a_1 = 36$; 1 т. за намиране на сумата $\sum \frac{1}{a_i \cdot a_{i+1}}$; 1 т. за намиране на сумата $\sum \frac{1}{\sqrt{a_i} + \sqrt{a_{i+1}}}$; 2 т. за отговор и довършване.

Задача 11.3. С P_n , $n \geq 3$ означаваме правилен n -ъгълник, всеки два върха на който са свързани с отсечка. Едно естествено число $k \geq 2$ ще наричаме *лабилно*, ако за някое $n \geq 3$, съществува оцветяване на отсечките в P_n в точно k цвята, така че за всяко подмножество X от върхове на P_n , точният брой на цветовете, в които са оцветени отсечките, свързващи двойките върхове от X , **не** е равен на $k - 1$. Да се намерят всички лабилни числа k .

Отговор: $k \in \{i \in \mathbb{N} : i \geq 2\} \setminus \{2, 4\}$.

Решение. Ще покажем, че всички лабилни числа са $k \geq 2, k \neq 2, 4$. Числото $k = 2$ не е лабилно, защото за всяко оцветяване на P_n в два цвята избираме множество X от точно две точки. Отсечката между тях е оцветена в точно един цвят. Числото $k = 3$ е лабилно. Наистина, ако вземем P_3 , няма подмножество на върховете му, определящи отсечки оцветени в точно 2 цвята.

Числото $k = 4$ не е лабилно. Ще докажем, че ако отсечките на P_n са оцветени в 4 цвята, винаги може да намерим подмножество X на върховете, определящо отсечки оцветени в точно 3 цвята. Да вземем P_n , отсечките на което са оцветени в точно 4 цвята. Нека X' е подмножество на върховете в P_n с минимален брой елементи, такова че отсечките с краища в X' да са оцветени в точно 4 цвята. Очевидно $|X'| \geq 4$. Нека $v \in X'$ е произволен връх в X' . Съгласно екстремалността на X' , ако премахнем v и всички отсечки с край във v , ще получим множеството $X' \setminus \{v\}$, което има по-малко на брой върхове от X' и значи броят на цветовете m , които се срещат измежду отсечките с краища в $X' \setminus \{v\}$ е най-много 3. Ако $m = 3$ сме готови. Да допуснем, че $m \leq 2$. Тогава, има два различни цвята, които се срещат в отсечките, които свързват v с върховете в $X' \setminus \{v\}$, но нито един от тях не се среща в оцветяването на отсечките с върхове в $X' \setminus \{v\}$. Нека отсечките vz и vw , $z, w \in X' \setminus \{v\}$ са оцветени в тези два цвята. Тъй като отсечката zw не може да е оцветена в някой от горните два цвята, то множеството $X = \{v, w, z\}$ определя три отсечки в три различни цвята. Окончателно, $k = 4$ не е лабилно.

Ще покажем, че всяко $k \geq 5$ е лабилно. Да номерираме цветовете от 1 до k и вземем P_{k-1} . Оцветяваме $v_i v_{i+1}$ в цвят i , за $i = 1, 2, \dots, k-1$ (приемаме, че $v_k \equiv v_1$). Всички останали отсечки оцветяваме в цвят k . Да допуснем, че съществува множество X , което да генерира $k - 1$ оцветяване на отсечките в него. Тъй като X има по-малко върхове от P_n , то съществува v_i такова, че $v_i \notin X$. Но тогава, нито цвят i нито цвят

$i - 1$ (за $i = 1$, втория цвят е $k - 1$) се срещат в оцветените отсечки с краища в X . Противоречие. Следователно числата $k \geq 5$ са лабилни.

Оценяване. (7 точки) по 1 т. за случаите $k = 2, 3$; 3 т. за случая $k = 4$; 2 т. за случая $k \geq 5$.

Задача 11.4. Дадена е редицата от естествени числа $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, като за всяко $m \in \mathbb{N}$ са изпълнени условията:

- ако $a_i \equiv a_j \pmod{m}$ за някои $i, j \in \mathbb{N}$, то $a_{i+1} \equiv a_{j+1} \pmod{m}$
- ако $a_i \equiv 0 \pmod{m}$ за някое $i \in \mathbb{N}$, то $a_{i+1} \equiv 0 \pmod{m}$.

Докажете, че за всеки $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}$ съществува $n \in \mathbb{N}$ такава, че

$$n + a_n \equiv b \pmod{a}.$$

Решение. Ще проведем индукция по a . Ще докажем, че за всяко $N \in \mathbb{N}$, съществува $n \geq N$, което удовлетворява (1). За $a = 1$ твърдението е тривиално. Нека $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ и нека сме доказали твърдението за всички по-малки стойности от a . Да предположим първо, че редицата има член с остатък 0 по модул a . Тогава $a_n \equiv 0 \pmod{a}$ за всички достатъчно големи n и е достатъчно да вземем такава n , за което $n \equiv b \pmod{a}$.

Нека сега $a_n \not\equiv 0 \pmod{a}, \forall n \in \mathbb{N}$. Тогава тя е периодична по модул a с период k от някое място нататък. Т.е. $a_{i+kj} \equiv a_i \pmod{a}$ за всяко $j \in \mathbb{N}$ и всяко $i \geq N$, където $N \in \mathbb{N}$. Нека k е най-малкият такъв период. Това означава, че числата $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+k-1}$ дават различни ненулеви остатъци по модул a и значи $k < a$. И така

$$(i + kj) + a_{i+kj} - b = a_i + i - b + kj \pmod{a}.$$

Нека $d = (k, a)$ и $k = k_1 d, a = a_1 d$. Да забележим, че за всяко $j_1 \in \mathbb{N}$ съществува $j \in \mathbb{N}$ такава, че $jk + j_1 d \equiv 0 \pmod{a}$. Наистина, $jk + j_1 d = (jk_1 + j_1)d$. От друга страна, тъй като $(k_1, a_1) = 1$, можем да намерим $j \in \mathbb{N}$ така, че $a_1 \mid jk_1 + j_1$, което означава $a \mid jk + j_1 d$.

И така, за да докажем, че съществуват $i, j \in \mathbb{N}, i \geq N$, които удовлетворяват:

$$(a_i + i - b) + kj \equiv 0 \pmod{a}$$

е достатъчно да намерим $i \geq N$, такава че $d \mid a_i + i - b$. Но от $k < a$ следва $d < a$. И така, сведохме задачата до намиране на $i \geq N$, за което

$$a_i + i \equiv b \pmod{d}.$$

Това може да се направи съгласно индукционното предположение.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за доказване, че ако $(k, a) = 1$, където k е периода на редицата по мод a , то всички остатъци $\pmod{k}$ са възможни; 5 т. за доказване на общия случай.