

Задача 12.1. Да се определят всички възможни стойности на израза $x^3 + y^2 + z$, където x, y и z са реални неотрицателни числа, за които $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решение. Имаме, че

$$x^3 + y^2 + z \leq x^2 + y^2 + z = 1 - z^2 + z = -(1/2 - z)^2 + 5/4 \leq 5/4,$$

както и

$$x^3 + y^2 + z \geq x^3 + y^2 + z^2 = x^3 - x^2 + 1.$$

От друга страна функцията $f(x) := x^3 - x^2 + 1$ изпълнява $f'(x) = 3x^2 - 2x$, откъдето следва, че f има точно един локален минимум в $[0, 1]$, а именно $x = 2/3$, т.к. $f'(x) > 0$ за $x < 0$, $f'(x) < 0$ за $x \in (0, 2/3)$ и $f'(x) > 0$ за $x \in (2/3, 1]$. Така получаваме, че $x^3 + y^2 + z \geq f(x) \geq f(2/3) = 23/27$. От съображения за непрекъснатост функцията $f(x)$ приема всички стойности в интервала $[23/27, 1]$, а функцията $g(z) := 1 - z^2 + z$ приема всички стойности в $[1, 5/4]$, което означава, че всяка стойност $a \in [23/27, 5/4]$ се достига – ако $a \leq 1$ избираме x_0 , т.че $f(x_0) = a$ и полагаме $(x, y, z) = (x_0, \sqrt{1 - x_0^2}, 0)$, а ако $a > 1$ избираме $z_0 \in [0, 1]$, за което $g(z_0) = a$ и полагаме $(x, y, z) = (0, \sqrt{1 - z_0^2}, z_0)$. Еквивалентно последната стъпка може да се замени с обобщение на теоремата за междинните стойности, като е необходимо да се отбележи, че множеството $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in [0, 1], x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ е свързано и бъдат посочени стойности на x, y, z , за които долната и горната граница на израза се достигат.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за $f(x) \geq 23/27$; 1 т. за $x^3 + y^2 + z \leq 5/4$; 2 т. за довършване.

Задача 12.2. Даден е остроъгълен и разностранен $\triangle ABC$ с описана окръжност ω и център на вписаната окръжност I . Нека $CI \cap \omega = \{C, M\}$ и нека X е такава точка от лъча MI , че $MX = \frac{CI}{2}$. Ако точката N е среда на отсечката BC , то да се докаже, че $\angle IAX = \angle INX$.

Решение. Нека точка J е центърът на външновписаната окръжност на $\triangle ABC$ срещу върха C . Имаме, че X е среда на CJ , т.к. $IM = MJ$. От друга страна $\triangle AJC \sim \triangle IBC$, т.к.

$$\angle AJC = \angle IBC = \frac{\angle ABC}{2}$$

и

$$\angle ACJ = \angle ICB = \frac{\angle ACB}{2}.$$

Да отбележим, че точките X и N са съответни елементи в двата триъгълника, откъдето следва, че $\angle NIC = \angle XAC$.

Оттук нататък задачата може да се реши по няколко начина:

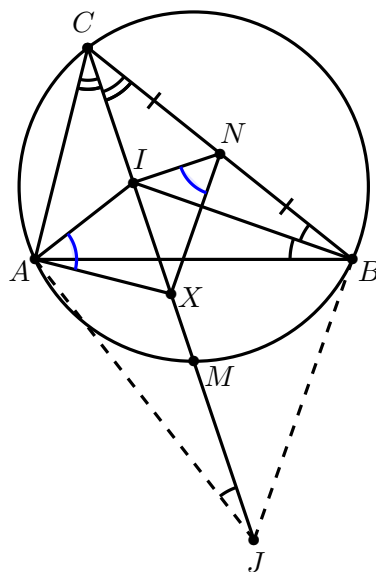
Първи начин. $XN \parallel BJ$ като средна отсечка в $\triangle CBJ$, откъдето $\angle NXI = \angle JBI = \angle CAI$. Така $\angle INX = \angle CIN - \angle IXN = \angle CAX - \angle IAC = \angle XAI$.

Втори начин. Ако $NI \cap AX = P$, то

$$\angle PAC + \angle PIC = \angle XAC + 180^\circ - \angle NIC = 180^\circ,$$

т.е. точките A, P, I, C лежат на една окръжност. Оттук следва, че $\angle XPN = \angle ACI = \angle XCN$, т.е. P, X, C, N са на една окръжност. Следователно $\angle XNI = \angle PCI = \angle IAX$, като последното следва от фактът, че $APIC$ е вписан.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за X е среда на CJ ; 1 т. за $\triangle AJC \sim \triangle IBC$; 1 т. за отбелязване, че X и N са съответни елементи; 2 т. за довършване



Задача 12.3. Нека $A_1, \dots, A_{2025}$ са (не непременно различни) точки в $\mathbb{R}^3$. Да се определи максималният брой тройки индекси $1 \leq i < j < k \leq 2025$, за които точките A_i, A_j, A_k образуват равностранен триъгълник със страна 1.

Отговор. $506^2 \cdot 2027 = 518\,984\,972$.

Решение. Ще наричаме тройка индекси $1 \leq i < j < k \leq 2025$ *хубава*, ако $\triangle A_i A_j A_k$ е равностранен със страна 1.

Пример за конфигурация с $506^2 \cdot 2027$ хубави тройки индекси е правилен тетраедър $ABCD$, за който всички точки A_i са разпределени равномерно във върховете му, т.е. $A_i \equiv A$ за $i = 1, 2, \dots, 506$; $A_i \equiv B$ за $i = 507, \dots, 1012$; $A_i \equiv C$ за $i = 1013, \dots, 1518$ и $A_i \equiv D$ за $i = 1519, \dots, 2025$. Това дава общо

$$506^3 + 3 \cdot 506^2 \cdot 507 = 506^2 \cdot 2027$$

хубави тройки индекси.

Да разгледаме конфигурация от точки $A_1, A_2, \dots, A_{2025}$, която максимизира броя тройки с исканото свойство и да допуснем, че има две точки A_i, A_j , които са на разстояние различно от 1. БОО можем да приемем, че A_i участва в повече равностранни триъгълници със страна 1 от A_j . Тогава, ако преместим A_j в A_i , то общият брой равностранни триъгълници със страна 1 не намалява, т.к. A_i и A_j не участват заедно в равностранен триъгълник със страна 1. Следователно съществува максимална конфигурация, за която разстоянието между всеки две точки A_i и A_j е или 0 или 1.

Да отбележим, че т.к. не съществува множество от 5 точки в $\mathbb{R}^3$, за което разстоянието между всеки две от тях е равно на 1, то съществува максимална конфигурация, за която всички точки се намират във върховете на правилен тетраедър $ABCD$. Нека $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ са бройката точки, намиращи се в A, B, C, D съответно. Тогава

общият брой хубави тройки индекси е

$$abc + bcd + cda + dab = ab(c + d) + cd(a + b) = bc(a + d) + ad(b + c) = ac(b + d) + bd(a + c),$$

като да отбележим, че е в сила $a + b + c + d = 2025$.

БОО нека $a \geq b \geq c \geq d$. Ако $a - d \geq 2$, то ако заменим a с $a - 1$ и d с $d + 1$, получавайки

$$\begin{aligned} bc(a + d) + (a - 1)(d + 1)(b + c) &= bc(a + d) + (ad + a - d - 1)(b + c) \\ &\geq bc(a + d) + (ad + 1)(b + c) \\ &> bc(a + d) + ad(b + c), \end{aligned}$$

т.е. в максимална конфигурация имаме $|a - d| \leq 1$, откъдето следва, че $\{a, b, c, d\} = \{506, 507\}$.

Оценяване. 0 точки за отговор; 1 т. за разглеждане на конфигурация, в която всички точки са във върховете на правилен тетраедър; 1 т. за вярно балансиране на върховете в тетаредъра и вярно пресмятане на отговора;

Оценка от горе: 1 т. за ясно твърдение, че в пространството няма 5 точки, всеки две от които са на разстояние 1; 1 т. за идеята за залепянето на точки на разстояние различно от 1; 3т. за довършване.

Други частични резултати (неадитивни с тези за горната оценка): До 2 точки за оценка от вида cn^3 за някое $c > 1/16$ в зависимост от стойността на c . Например $c = 1/6$ носи 0 точки $c = 7/60$ носи 2 точки.

Задача 12.4. Съществува ли естествено число n с точно 4500 делители, за което десетичният запис на $\sqrt{n}$ започва с 2025 деветки след десетичната запетая, т.е. $\sqrt{n} = A, \underbrace{99 \dots 9}_{2025} \dots$, за някое естествено число A ?

Отговор. Да!

Решение. Първо ще докажем следната

Лема. Ако $M \in \mathbb{N}$, то съществуват безбройно много естествени числа k , за които интервалът $(k^2, (k + 1)^2)$ съдържа поне M прости числа.

Доказателство. Да отбележим, че е достатъчно да докажем, че поне едно k съществува за всяко M , т.к. k -то, което работи за $m \geq M$, работи и за M , откъдето можем да конструираме безкрайна редица от k -та за дадено M . Да допуснем, че за всяко k интервалът съдържа $(k^2, (k + 1)^2)$ най-много M прости числа. Добре известно е, че $\sum_{p - \text{просто}} \frac{1}{p} = \infty$, откъдето следва, че

$$\infty = \sum_{p - \text{просто}} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p \in (k^2, (k+1)^2)} \frac{1}{p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{k^2} \leq 2M,$$

което е противоречие. С това лемата е доказана.

Ще докажем следното по-общо твърдение:

Ако $\varepsilon > 0$ и a е нечетно, то съществува естествено число n с $4a$ делители, за което дробната част на $\sqrt{n}$ изпълнява $\{\sqrt{n}\} > 1 - \varepsilon$.

Доказателство. От лемата следва, че можем да намерим интервал $(k^2, (k+1)^2)$, съдържащ поне $2l+1$ прости числа, където $l := \lceil \frac{2^a}{\varepsilon} \rceil$. Нека тези прости числа са $k^2 < q_0 < q_1 < q_2 < \dots < q_{2l} < (k+1)^2$. Следователно имаме

$$2k \geq q_{2l} - q_0 = \sum_{i=1}^l q_{2i} - q_{2(i-1)} \geq l \min_{i \leq l} (q_{2i} - q_{2(i-1)}),$$

т.е. съществува i , за което $q_{2i} - q_{2(i-1)} \leq \frac{2k}{l}$. За $p := q_{2i}$ и $q := q_{2(i-1)}$ имаме, че

$$\frac{p+q}{2} - \sqrt{pq} = \frac{(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p-q}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2k}{l} \cdot \frac{1}{2k} \right)^2 \leq \frac{1}{l^2}.$$

Сега нека изберем $n := 2^{a-1}pq$. Имаме, че

$$\sqrt{n} - 2^{\frac{a-3}{2}}(p+q) = 2^{\frac{a-1}{2}} \left(\sqrt{pq} - \frac{p+q}{2} \right) \leq \frac{2^{\frac{a-1}{2}}}{l^2} < \varepsilon.$$

Оттук твърдението следва, както и задачата след избор на $a = 1125$, $\varepsilon = 10^{-2026}$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за търсене на решение от вида Apq , където A е фиксирано с $45 \cdot 25$ делители; 2 т. за намиране на близки прости числа p и q чрез лемата или друг вариант на PNT; 4 т. за довършване.