

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Пети клас

Задача 1. Ако

$$A = 1\frac{28}{38} + 1\frac{17}{23} + \frac{35}{95} - \frac{51}{69},$$

B е неизвестното число от равенството

$$12\frac{1}{20} - B = 8\frac{11}{12}$$

и C е сборът на всички правилни несъкратими дроби от вида $\frac{n}{15}$, за които е изпълнено, че

$$\frac{n}{15} > \frac{1}{5},$$

намерете A , B и C и ги подредете по големина във възходящ ред.

Решение. Намираме

$$A = 1\frac{28}{38} + 1\frac{17}{23} + \frac{35}{95} - \frac{51}{69} = 1\frac{14}{19} + 1\frac{17}{23} + \frac{7}{19} - \frac{17}{23} = 2\frac{2}{19} + 1 = 3\frac{2}{19},$$

(2 точки)

$$B = 12\frac{1}{20} - 8\frac{11}{12} = 12\frac{3}{60} - 8\frac{55}{60} = 11\frac{63}{60} - 8\frac{55}{60} = 3\frac{8}{60} = 3\frac{2}{15}.$$

(1 точка)

От условието $\frac{n}{15} > \frac{1}{5} = \frac{3}{15}$ следва, че n е най-малко 4. Тъй като дробта $\frac{n}{15}$ е правилна, n е най-много 14. Освен това, дробта $\frac{n}{15}$ е несъкратима, което означава, че n не се дели на 3 и не се дели на 5. Следователно n може да е равно на 4, 7, 8, 11, 13 или 14.

Следователно

$$C = \frac{4}{15} + \frac{7}{15} + \frac{8}{15} + \frac{11}{15} + \frac{13}{15} + \frac{14}{15} = \frac{57}{15} = 3\frac{4}{5}.$$

(2 точки)

Тъй като $C = 3\frac{4}{5} = 3\frac{12}{15} > 3\frac{2}{15} = B$ и $A = 3\frac{2}{19} < 3\frac{2}{15} = B$, получаваме $A < B < C$.

(1 точка)

Задача 2. Три еднакви квадрата I, II и III са поставени така, че части от тях се припокриват, като:

- общата част на I и II е квадрат със страна 8 cm;
- общата част на I и III е правоъгълник с обиколка 20 cm;
- общата част на II и III е правоъгълник с обиколка 20 cm;
- общата част на I, II и III е квадрат с лице 9 cm^2 .

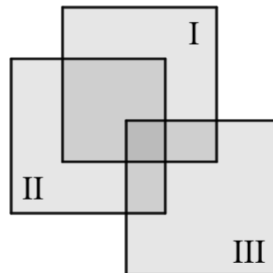
Намерете лицето и обиколката на фигурата, която покриват трите квадрата.

Решение. На чертежа е показано разположение на квадратите, което отговаря на условието.

(1 точка)

Общата част на трите квадрата е квадрат с лице 9 cm^2 , т.е. със страна 3 cm. Тогава общата част на I и III и на II и III е правоъгълник със страни 3 cm и $10 - 3 = 7 \text{ cm}$.

(1 точка)



Страната на всеки от трите квадрата е $8 + 4 = 12 \text{ cm}$.

(1 точка)

За да получим лицето на фигурата, трябва от сбора на лицата на трите квадрата $3 \cdot 144 = 432 \text{ cm}^2$ да извадим общите части на всеки два от тях ($64 + 21 + 21 = 106 \text{ cm}^2$) и да добавим лицето на общата част на трите (9 cm^2). Получаваме $432 - 106 + 9 = 335 \text{ cm}^2$.

(2 точки)

Обиколката на фигурата е равна на обиколката на квадрат със страна $12 + 12 - 3 = 21 \text{ cm}$, т.е. е равна на 84 cm.

(1 точка)

Задача 3. Три зайчета, Бън, Кей и Чип, живеят в къщичка в гората и всеки ден се разхождат по горска пътека. Те скачат с еднакви по дължина подскоци и по пътя си оставят камъчета. Бън оставя по едно бяло камъче на всеки девети подскок, Кей – по едно кафяво камъче на всеки 15-ти подскок, но ако там вече има оставено камъче, той оставя допълнително по още едно, а Чип – по едно червено камъче на всеки 6-ти подскок, но ако там вече има камъчета, ги взема и не оставя нищо. Един ден първо Бън излязъл от къщи, след него Кей и накрая Чип. На излизане всяко зайче имало по 100 камъчета и когато свършвало своите камъчета, то се връщало вкъщи.

а) На колко скока от къщи се е отдалечило всяко зайче?

б) Колко бели и кафяви камъчета е имал Чип накрая?

Решение. а) Бън се е отдалечил на $9 \cdot 100 = 900$ подскока от дома си.

Тъй като $\text{НОК}(9, 15) = 45$, на всеки 45-ти подскок до 900-ия, Кей ще оставя по едно камъче повече. Кей ще остави $900 : 15 + 900 : 45 = 60 + 20 = 80$ от своите камъчета до 900-ия подскок. Останалите 20 камъчета ще остави за $20 \cdot 15 = 300$ подскока. Следователно Кей ще се е отдалечил на 1200 подскока от дома си.

(1 точка)

Тъй като $\text{НОК}(6, 9) = 18$, $\text{НОК}(6, 15) = 30$ и $\text{НОК}(6, 9, 15) = 90$, във всяка поредица от 90 подскока Чип ще оставя камъчета на всеки подскок, кратен на 6 ($90 : 6 = 15$ общо), но некратен на 18 или 30. До 90-ия подскок кратните на 18 или 30 са $90 : 18 + 90 : 30 - 90 : 90 = 7$. Следователно за 90 подскока Чип ще остави $15 - 7 = 8$ камъчета.

До 900 има 10 групи от 90 подскока, т.е. Чип ще остави $8 \cdot 10 = 80$ от своите камъчета.

От 900 до 1200 подскок Чип ще оставя камъче на всеки кратен на 6 подскок с изключение на тези, които са кратни на 30.

Следователно на всяка поредица от 30 подскока ще оставя 4 камъчета. Той има останали 20 камъчета. Следователно ще направи 5 поредици от 30 подскока. Последното си камъче Чип ще остави на $900 + 5 \cdot 30 - 6 = 1044$ -тия си подскок.

(3 точки)

б) Чип е вземал по 1 бяло камъче при всеки подскок, кратен на 18 и не по-голям от 900, т.е. е взел $900 : 18 = 50$ бели камъчета.

(1 точка)

До 900-тия подскок включително Чип е вземал по 1 кафяво камъче при всеки подскок, кратен на 30 и по едно допълнително при всеки подскок, кратен на 90, общо $900 : 30 + 900 : 90 = 30 + 10 = 40$ кафяви камъчета.

От 900-ия до последния 1044 подскок Чип е вземал по 1 кафяво камъче на всеки подскок, кратен на 30, т.е. $(1020 - 900) : 30 = 4$ кафяви камъчета. Общо ще има 44 кафяви камъчета.

(2 точки)

Задача 4. В един клас всички деца са с различен ръст. Един ден всяко момче почерпило с бонбон всички ученици, които са по-високи от него, а всяко момиче почерпило с бонбон всички ученици, които са по-ниски от него.

Колко са учениците от класа, ако накрая се оказало, че:

а) две от децата не са получили бонбони, момчетата получили общо 55 бонбона, а момчетата получили общо 91 бонбона;

б) всички деца са получили по 14 бонбона?

Решение. а) Нека D е най-високото момиче и M е най-ниското момче. Ясно е, че D няма да получи бонбон от нито едно момиче, а всички момичета ще получат от D . Също, M няма да получи бонбони от нито едно момче, а всички момчета ще получат от него. С нито един бонбон могат да останат само D и M , и то само ако M е по-висок от D . Тогава и M няма да получи бонбон от нито едно момиче.

(2 точки)

Ако момичетата, по-ниски от D , са n на брой, а момчетата, по-високи от M , са m на брой, то учениците са подредени във възходящ ред така:

момиче₁, момиче₂, ..., момиче_n, D , M , момче₁, момче₂, ..., момче_m

Момчетата са получили общо $n + (n - 1) + \dots + 1 = 55$ бонбона. Тъй като $1 + 2 + \dots + 10 = 55$, то $n = 10$.

Аналогично момчетата са получили общо $1 + 2 + \dots + m = 91$ бонбона. Тъй като $1 + 2 + \dots + 13 = 91$, то $m = 13$. Следователно учениците са $10 + 13 + 2 = 25$.

(2 точки)

б) Нека всички деца са подредени по височина и А и В са две съседни деца, като А е по-ниско от В. Ако А и В са две момчета, то те ще получат по равен брой бонбони от останалите деца, но В ще получи от А, т.е. ще има 1 бонбон повече от А. Ако А и В са две момичета, то А ще получи от В, т.е. А ще има с 1 бонбон повече от В. Ако А е момче, В е момиче, то те получават еднакъв брой бонбони от всички останали и си разменят по 1 бонбон. Следователно А и В получават еднакъв брой бонбони. Ако А е момиче, В е момче, то те получават еднакъв брой бонбони от всички останали и не си разменят бонбони помежду си. Следователно отново получават еднакъв брой бонбони.

За да получат всички деца по 14 бонбона, в редицата се редуват момче и момиче във възходящ ред. (1 точка)

Ако най-ниското дете е момче, то е получило бонбони само от всички момичета, следователно момчетата са 14.

Ако най-ниското дете е момиче, то е получило бонбони само от останалите момичета и от нито едно момче. Следователно момчетата са 15.

Ако най-високото дете е момиче, то е получило бонбони само от всички момчета, следователно момчетата са 14.

Ако най-високото дете е момче, то е получило бонбони само от останалите момчета, следователно момчетата са 15.

Тези случаи могат да се обобщят в таблица:

най-ниско дете	най-високо дете	брой момичета	брой момчета	Общо
момиче	момче	15	15	30
момиче	момиче	15	14	29
момче	момиче	14	14	28
момче	момче	14	15	29

Следователно броят на децата в класа е 28, 29 или 30.

(2 точки)