

Шести клас

Задача 1. По маршрута на велопоход има 9 пункта за вода – първият е на старта, а деветият е на финала. Пунктовете са на равни разстояния един от друг.

Георги стартирал в 8:00 часа и когато изминал $\frac{1}{3}$ от маршрута, пресметнал, че му остават още 3 km до следващия пункт за вода.

а) Колко километра е дължината на маршрута?

б) Георги и Иван пристигнали на финала в 12:00 часа. Ако скоростта на Георги е била с 20% по-малка от скоростта на Иван, намерете в колко часа е стартирал Иван.

Решение. а) Пунктовете за вода разделят маршрута на 8 равни части.

Тъй като $\frac{2}{8} < \frac{1}{3} < \frac{3}{8}$, в момента, в който Георги е изминал $\frac{1}{3}$ от маршрута, до следващия пункт му остава $\frac{3}{8} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$ от маршрута, което по условие е 3 km. Следователно дължината на маршрута е $24 \cdot 3 = 72$ km.
(3 точки)

б) Ако скоростта на Иван е x km/h, то скоростта на Георги е $80\%x$. Тъй като Георги е изминал пътя за 4 часа, неговата скорост е била $72 : 4 = 18$ km/h. Получаваме

$$80\%x = 18,$$

откъдето $x = 22,5$ km/h.

(2 точки)

Иван е изминал маршрута за $72 : 22,5 = 3,2$ h, т.е. за 3 h 12 min. Щом е финиширал в 12:00, той е стартирал в 8:48.

(1 точка)

Задача 2. В клетките на таблица с 2 реда и 60 стълба последователно се записват числа по следния начин:

- в двете клетки на първия стълб се записва числото 5;
- на първия ред във всяка клетка след първата се записва число, равно на $(x - 1) : (x + 1)$, където x е числото в предишната клетка в първия ред;
- на втория ред във всяка клетка след първата се записва число, равно на $(x - 1) : (x + 2)$, където x е числото в предишната клетка във втория ред.

В колко колони на таблицата са записани две равни числа?

Решение. Второто число на първия ред е $(5 - 1) : (5 + 1) = \frac{2}{3}$,

$$\text{третото е } \left(\frac{2}{3} - 1\right) : \left(\frac{2}{3} + 1\right) = -\frac{1}{5},$$

$$\text{четвъртото е } \left(-\frac{1}{5} - 1\right) : \left(-\frac{1}{5} + 1\right) = -\frac{3}{2},$$

$$\text{петото е } \left(-\frac{3}{2} - 1\right) : \left(-\frac{3}{2} + 1\right) = 5.$$

Това означава, че на първия ред периодично се повтарят числата $5, \frac{2}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{3}{2}$. (2 точки)

На втория ред второто число е $(5 - 1) : (5 + 2) = \frac{4}{7}$,

$$\text{третото е } \left(\frac{4}{7} - 1\right) : \left(\frac{4}{7} + 2\right) = -\frac{1}{6},$$

$$\text{четвъртото е } \left(-\frac{1}{6} - 1\right) : \left(-\frac{1}{6} + 2\right) = -\frac{7}{11},$$

$$\text{петото е } \left(-\frac{7}{11} - 1\right) : \left(-\frac{7}{11} + 2\right) = -\frac{6}{5},$$

$$\text{шестото е } \left(-\frac{6}{5} - 1\right) : \left(-\frac{6}{5} + 2\right) = -\frac{11}{4},$$

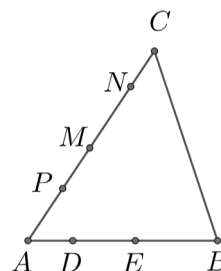
$$\text{седмото е } \left(-\frac{11}{4} - 1\right) : \left(-\frac{11}{4} + 2\right) = 5.$$

Следователно на втория ред периодично се повтарят числата $5, \frac{4}{7}, -\frac{1}{6}, -\frac{7}{11}, -\frac{6}{5}, -\frac{11}{4}$. (3 точки)

Колона с две равни числа може да се получи, само ако и в двете клетки на тази колона е записано числото 5. Тъй като $\text{НОК}(4; 6) = 12$, колоните с равни числа са $60 : 12 = 5$.

(1 точка)

Задача 3. Даден е триъгълник ABC . Върху страната AB са избрани точки D и E така, че D е между A и E , а върху страната AC са избрани точки P , M и N в този ред, считано от върха A .



Дадените точки разделят страните на триъгълника, като:

$$AD = \frac{1}{a} \cdot AB, \quad DE = \frac{1}{b} \cdot AB, \quad EB = \frac{1}{c} \cdot AB,$$

$$AP = \frac{1}{p} \cdot AC, \quad PM = \frac{1}{m} \cdot PC, \quad MN = \frac{1}{n} \cdot MC,$$

където a, b, c, n, m, p са едноцифрени естествени числа и

$$a < b < c < n < m < p.$$

а) Намерете числата a, b, c, n, m, p .

б) Разстоянията от точките P, M и N до правата AB са равни съответно на h_1, h_2 и h_3 , а разстоянията от точките D и E до правата AC са равни съответно на h_4 и h_5 . Ако

$$2(h_1 + h_2 + h_3) = h_4 + h_5,$$

докажете, че триъгълникът ABC е равнобедрен.

Решение. а) От $AD + DE + EB = AB$ следва, че

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Единствените различни едноцифрени числа, за които това равенство е изпълнено, са $a = 2, b = 3, c = 6$. (Ясно е, че a не може да е 1; най-голямото събираемо в сбора е $\frac{1}{a}$, следователно $\frac{1}{a} > \frac{1}{3}$, откъдето следва, че $a = 2$. Тогава $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ и тъй като $\frac{1}{b} > \frac{1}{c}$, получаваме $\frac{1}{b} > \frac{1}{4}$, следователно $b = 3$, а $c = 6$.)

Тъй като всички търсени числа са едноцифрени, подредени в нарастващ ред, то $n = 7, m = 8, p = 9$.

(2 точки)

б) Нека с h_b и h_c означим височините в триъгълника ABC към страните AC и AB съответно.

От $AP = \frac{1}{9}AC$ следва, че $S_{APB} = \frac{1}{9}S_{ABC}$, а тъй като тези триъгълници имат обща страна AB , получаваме, че $h_1 = \frac{1}{9}h_c$.

От $PM = \frac{1}{8} \cdot PC = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{9}AC = \frac{1}{9}AC$ следва, че $AM = \frac{2}{9}AC$, откъдето $S_{AMB} = \frac{2}{9}S_{ABC}$, а тъй като тези триъгълници имат обща страна AB , получаваме, че $h_2 = \frac{2}{9}h_c$.

По същия начин, от $MN = \frac{1}{7} \cdot MC = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{9}AC = \frac{1}{9}AC$ следва, че $AN = \frac{3}{9}AC$, откъдето $S_{ANB} = \frac{3}{9}S_{ABC}$, а тъй като тези триъгълници имат обща страна AB , получаваме, че $h_3 = \frac{3}{9}h_c$.

$$\text{Следователно } 2(h_1 + h_2 + h_3) = 2 \cdot \frac{1 + 2 + 3}{9}h_c = \frac{4}{3}h_c. \quad (2 \text{ точки})$$

От $AD = \frac{1}{2}AB$ следва, че $S_{ADC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$, а тъй като тези триъгълници имат обща страна AC , получаваме, че $h_4 = \frac{1}{2}h_b$.

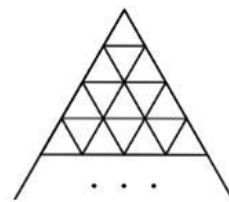
От $AE = \frac{5}{6}AB$ следва, че $S_{AEC} = \frac{5}{6}S_{ABC}$, а тъй като тези триъгълници имат обща страна AC , получаваме, че $h_5 = \frac{5}{6}h_b$.

$$\text{Следователно } h_4 + h_5 = \frac{1}{2}h_b + \frac{5}{6}h_b = \frac{4}{3}h_b. \quad (2 \text{ точки})$$

Като заместим в даденото равенство $2(h_1 + h_2 + h_3) = h_4 + h_5$, получаваме, че $h_c = h_b$. Следователно $AB = AC$, т.е. триъгълникът ABC е равнобедрен.

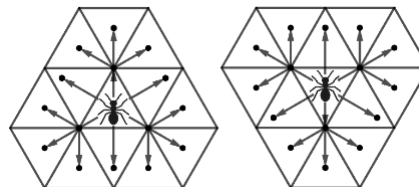
(1 точка)

Задача 4. Равностранен триъгълник със страна 45 cm е разделен на клетки с форма на равностранен триъгълник със страна 1 cm (виж фигура 1). В някои две клетки от триъгълника са поставени паяк и скакалец.



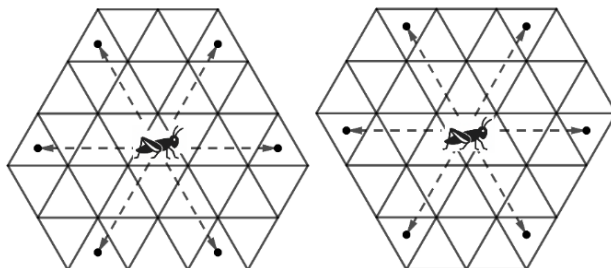
Фиг. 1

Паякът с един ход може да се премести във всяка клетка, която има обща страна или връх с тази, в която се намира (фигура 2). В никоя клетка той не стъпва повече от веднъж.



Фиг. 2

Скакалецът за един ход прескача по три клетки в показаните посоки и скача в една от шестте клетки, посочени със стрелки на фигура 3. В никоя клетка той не стъпва повече от веднъж.



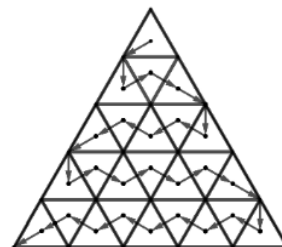
Фиг. 3

Най-много колко клетки може да посети всяко насекомо?

Посочете (чрез пример) от коя клетка тръгва насекомото и как се движи, за да посети най-много клетки. Докажете, че не може да посети по-голям брой клетки.

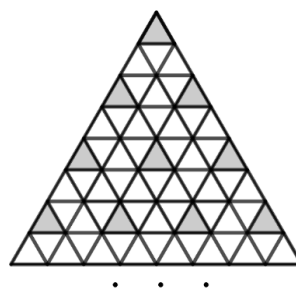
Решение. Ако поставим паяка в клетка във връх на триъгълника, той може да обиколи всички клетки ред по ред. На първия ред има 1 клетка, на втория 3, на третия 5 и т.н. На 45-ия ред има $45 \cdot 2 - 1 = 89$ клетки. Следователно общият брой клетки, които може да обходи паякът, е

$$1 + 3 + 5 + \dots + 87 + 89 = 45 \cdot 90 : 2 = 2025.$$



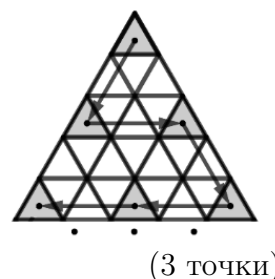
(2 точки)

Нека поставим скакалеца в някоя от клетките, които се намират във връх на триъгълника. Оцветяваме тази клетка в черно и продължаваме да оцветяваме през ред, като оцветяваме първата и всяка четвърта клетка по този ред. При това оцветяване, ако скакалецът тръгне от черна клетка, той винаги попада отново в черна.



Скакалецът може да обиколи всички черни клетки, като мине последователно по нечетните редове, както е показано на схемата. Общият брой на оцветените клетки е

$$1 + 2 + \dots + 23 = \frac{23 \cdot 24}{2} = 276.$$



За да се убедим, че по-дълъг маршрут е невъзможен, ще оцветим клетките в осем цвята. На чертежа във всяка клетка е записан номерът на нейния цвят; на нечетните редове се редуват цветовете 1, 5, 6, 7, а на четните редове се редуват цветовете 2, 4, 3, 8. При това оцветяване скакалецът може да посещава клетки само от един и същ цвят. Клетките от всеки от цветовете 2, 3, 4, 5, 6 и 7, са $1 + 2 + \dots + 22 = \frac{22 \cdot 23}{2} = 253$, а клетките от цвят 8 са $1 + 2 + \dots + 21 = \frac{21 \cdot 22}{2} = 231$.

